LE SCARICHE OSCILLANTI

NEI

SISTEMI DI CONDUTTORI COMPLESSI

E

LA TEORIA ELETTROMAGNETICA

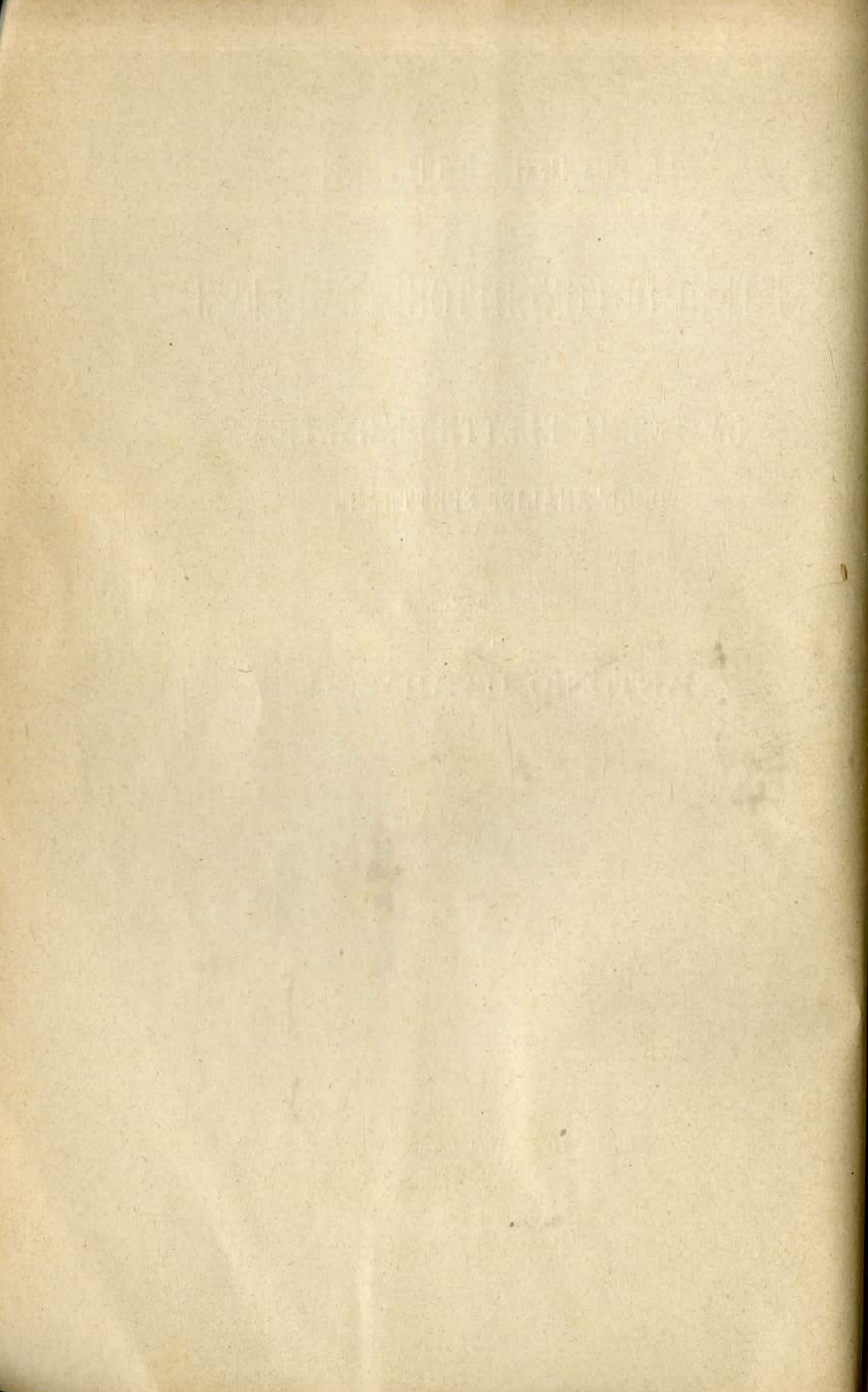
DELL' ANALISI SPETTRALE

MEMORIA

DI

ANTONIO GARBASSO

Estratto dal Nuovo Cimento Serie V, Vol. VIII e IX, 1904-1905

PISA
DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1905

LE SCARICHE OSCILLANTI NEI SISTEMI DI CONDUTTORI COMPLESSI E LA TEORIA ELETTROMAGNETICA DELL' ANALISI SPETTRALE.

Memoria di ANTONIO GARBASSO.

Avvertenza preliminare. — Quando si studia l' azione dei corpi trasparenti su la luce ci troviamo di solito in vicinanza di *una* fra le righe caratteristiche dello spettro d' assorbimento; la velocità delle onde e la costante di estinzione risultano quindi determinate da quella riga in modo preponderante.

Vuol dire che i fenomeni saranno poco dissimili da quelli che si avrebbero con l' impiego di sistemi forniti di *un solo* periodo proprio; è per questo che il risonatore di Hertz, nella sua forma comune, basta già a riprodurre tutta una serie di fatti, come il colore superficiale e l' assorbimento elettivo, la rifrazione e la dispersione della luce.

Ma, se ci si domanda di costruire un modello per le molecole e gli atomi dei corpi *luminosi*, siamo obbligati a rinunciare a quel primo schema, e a rivolgere invece la nostra considerazione a conduttori di gran lunga meno semplici.

Volendo stabilire una teoria elettromagnetica dell' analisi spettrale, nell' ordine di idee indicato, bisogna dunque anzitutto porre e risolvere il problema delle scariche oscillanti in un conduttore complesso, anzi in un sistema di conduttori complessi; e solamente dopo questo lavoro preliminare si cercherà di vedere fino a che punto i resultati del calcolo corrispondano a quelli più sicuri delle indagini sperimentali.

E l' una e l' altra cosa ho procurato di fare in una serie di lavori, che pubblicai negli ultimi due anni; i quali lavori mi propongo adesso di raccogliere e di coordinare nella presente Memoria.

Il problema delle scariche nel caso più generale, sotto la sola riserva che le capacità dei fili siano trascurabili, porta ad equazioni differenziali ordinarie, lineari ed omogenee, con coefficienti costanti.

Per chiarezza di esposizione e per economia di tempo, stabilisco quindi in primo luogo (Capitolo primo) certe formole simboliche, che permettono di integrare immediatamente dei sistemi di tale natura.

E poi faccio vedere (Capitolo secondo) come si risolva il problema delle scariche in un circuito complesso, ed applico la teoria ad alcune disposizioni particolari; per queste il calcolo non è condotto a compimento, ma limitato alla ricerca dei periodi caratteristici.

In realtà la conoscenza delle costanti arbitrarie ha interesse nei soli casi in cui siamo in grado di fissare sperimentalmente le condizioni iniziali. Questo si fa appunto nelle esperienze del Cardani e di altri su le scariche derivate dai condensatori; e però nel Capitolo terzo, per dare un esempio completo del metodo, studio le leggi secondo le quali la carica posseduta da una capacità passa nel suolo per due fili paralleli.

Segue (Capitolo quarto) la teoria generale delle oscillazioni elettriche in un sistema di conduttori complessi, teoria che applico pure ad alcuni problemi più semplici.

La mancanza di dati sperimentali sicuri non permette nel caso presente nessun confronto quantitativo.

Dopo queste premesse vengo a studiare (Capitolo quinto) il fenomeno dell'emissione della luce. Poichè ai sistemi di sistemi si possono estendere talune fra le proprietà più importanti dei sistemi di circuiti semplici, lascio impregiudicata da principio la quistione della struttura degli atomi materiali, e considero le molecole appunto come sistemi di conduttori. Le modificazioni prodotte nello spettro dal variare della temperatura e della pressione, e l'esistenza di spettri proprii dei corpi composti, e il diverso assorbimento delle molecole isomere trovano così una teoria semplice e naturale.

Resta il problema degli atomi: e per questi faccio vedere che conviene considerarli come complessi, piuttosto che come circuiti semplici. Stabilisco poi che, ad ogni modo, il modello non può essere unico, e deduco dall'esperienza in alcuni casi pratici il numero dei conduttori elementari; le serie di Kayser

e Runge vengono così a prendere un significato fisico, e risultano emesse da certi speciali circuiti [1]).

Sommario.

1) I dati relativi alla letteratura sono raccolti in fine di ciascun capitolo.
Le equazioni entro i limiti dei singoli capitoli sono richiamate con un semplice numero, altrimenti con due. Così la sigla (II, 5) sta ad indicare la quinta equazione del capitolo secondo.

CAPITOLO PRIMO.

Integrali simbolici per un sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee, a coefficienti costanti.

§ 1. *Eliminazione.* — Si abbia un sistema di $n+1$ equazioni, delle quali si suppone che contengano, sotto una forma lineare ed omogenea, $n+1$ funzioni e le loro derivate rispetto ad una variabile t fino all' ordine s. I coefficienti saranno costanti.

Chiamando:

$$y_1 \cdot y_2 \cdots y_\nu \cdots y_n \text{ e } z$$

le funzioni incognite, le equazioni proposte potranno mettersi sotto la forma:

$$(1) \quad \sum_1^n \nu\, \alpha_{\mu,\nu}\, y_\nu + \sum_1^n \nu \sum_1^s \sigma\, \beta_{\mu,\nu,\sigma} \frac{d^\sigma y_\nu}{dt^\sigma} + \gamma_\mu z + \sum_1^s \sigma\, \delta_{\mu,\sigma} \frac{d^\sigma z}{dt^\sigma} = 0,$$

$$(\mu = 1,2 \ldots n+1),$$

ove con:

$$\alpha_{\mu,\nu} \cdot \beta_{\mu,\nu,\sigma} \cdot \gamma_\mu \text{ e } \delta_{\mu,\sigma}$$

si indichino delle quantità costanti.

Porremo per brevità di scrittura:

$$\frac{d}{dt} = \mathrm{D},$$

e quindi:

$$\frac{d^\sigma}{dt^\sigma} = \mathrm{D}^\sigma,$$

e introdurremo ancora le notazioni:

$$\alpha_{\mu,\nu} + \sum_1^s \sigma\, \beta_{\mu,\nu,\sigma} D^\sigma = A_{\mu,\nu}\,,$$

$$\gamma_\mu + \sum_1^s \sigma\, \delta_{\mu,\sigma} D^\sigma = B_\mu\,.$$

Così le (1) prenderanno la forma semplice:

$$(1') \qquad \sum_1^n \nu\, A_{\mu,\nu}\, y_\nu + B_\mu\, z = 0\,,$$

$$(\mu = 1, 2 \ldots n+1).$$

Queste si possono trattare adesso come $n+1$ equazioni algebriche e lineari per le y_ν; la loro coesistenza esige che si annulli il determinante dei coefficienti e dei termini indipendenti.

Se ne ricava dunque:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu} & A_{1,\nu+1} & \ldots A_{1,n} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu} & A_{2,\nu+1} & \ldots A_{2,n} & B_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \ldots A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu} & A_{\mu,\nu+1} & \ldots A_{\mu,n} & B_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \ldots A_{n+1,\nu-1} & A_{n+1,\nu} & A_{n+1,\nu+1} & \ldots A_{n+1,n} & B_{n+1} \end{vmatrix} z = 0,$$

dove il determinante esprime un' operazione, che si deve applicare appunto alla funzione z.

La legittimità del procedimento si riconosce osservando che, se si trattano le (1') nel modo indicato, si fanno in sostanza le stesse operazioni che, coi metodi ordinarii, conducono ad eliminare tutte le funzioni incognite ad eccezione di una sola. Naturalmente si tiene conto del fatto che le regole della moltiplicazione possono applicarsi al simbolo D, quando si dia alla potenza D^σ il senso stabilito.

Poichè la z nelle (1') non è trattata diversamente dalle y_ν, riesce evidente senz' altro che un' equazione della stessa forma deve valere per quelle funzioni. In realtà, ripetendo il

calcolo, e lasciando per ultima la funzione y_ν si verrebbe a ritrovare per questa la (2), con la sola differenza che la ν-esima e l' ultima verticale del determinante scambierebbero i loro posti.

Possiamo dunque affermare che *l' eliminazione si fa applicando ad ogni funzione incognita il determinante dei coefficienti.*

§ 2. *Integrazione.* — Dalla (2) segue:

$$z = \sum_1^p \pi \, C_\pi \, e^{c_\pi t} , \tag{3$_1$}$$

$$p = s(n + 1) ,$$

dove le C_π sono costanti arbitrarie e le c_π devono determinarsi come radici dell' equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu} & A_{1,\nu+1} & \ldots & A_{1,n} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu} & A_{2,\nu+1} & \ldots & A_{2,n} & B_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \ldots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu} & A_{\mu,\nu+1} & \ldots & A_{\mu,n} & B_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \ldots & A_{n+1,\nu-1} & A_{n+1,\nu} & A_{n+1,\nu+1} & \ldots & A_{n+1,n} & B_{n+1} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

quando in essa la D si consideri come un' incognita e non più come un simbolo di operazione.

Ciò posto assumeremo le n prime fra le equazioni (1') e le risolveremo come equazioni algebriche fra le y_ν.

Verrà:

$$y_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\Delta} \begin{vmatrix} B_1 & A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu+1} & \ldots & A_{1,n} \\ B_2 & A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_\mu & A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \ldots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu+1} & \ldots & A_{\mu,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n & A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,\nu-1} & A_{n,\nu+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix} z ,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{\mu,1} & \cdots & A_{\mu,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}, \text{[1]}$$

o, sostituendo a z il valore (3_1):

$$y_\nu = (-1)^\nu \sum_1^p {}_\pi \frac{C_\pi e^{c_\pi t}}{\Delta(c_\pi)}$$

$$(3_2) \times \begin{vmatrix} B_1(c_\pi) & A_{1,1}(c_\pi) & \cdots & A_{1,\nu-1}(c_\pi) & A_{1,\nu+1}(c_\pi) & \cdots & A_{1,n}(c_\pi) \\ B_2(c_\pi) & A_{2,1}(c_\pi) & \cdots & A_{2,\nu-1}(c_\pi) & A_{2,\nu+1}(c_\pi) & \cdots & A_{2,n}(c_\pi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_\mu(c_\pi) & A_{\mu,1}(c_\pi) & \cdots & A_{\mu,\nu-1}(c_\pi) & A_{\mu,\nu+1}(c_\pi) & \cdots & A_{\mu,n}(c_\pi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_n(c_\pi) & A_{n,1}(c_\pi) & \cdots & A_{n,\nu-1}(c_\pi) & A_{n,\nu+1}(c_\pi) & \cdots & A_{n,n}(c_\pi) \end{vmatrix}.$$

1) Il senso della divisione per una funzione del simbolo D è stabilito dalla convenzione che l'operazione $f^{-1}(D)$ distrugge l'operazione $f(D)$.

Se è:

$$y = e^{ct},$$

e con $f(D)$ si indica un polinomio in D, si verifica subito che dovrà essere:

$$\frac{y}{f(D)} = \frac{e^{ct}}{f(D)} = \frac{e^{ct}}{f(c)}.$$

Infatti, ponendo ad esempio:

$$f(D) = \Sigma\sigma\, K_\sigma D^\sigma,$$

verrebbe:

$$f(D)\, e^{ct} = \Sigma\sigma\, K_\sigma D^\sigma e^{ct} = \Sigma\sigma\, K_\sigma c^\sigma e^{ct},$$

ed avendosi per definizione:

$$\frac{f(D)\, e^{ct}}{f(D)} = e^{ct},$$

seguirebbe senz'altro:

$$\frac{\Sigma\sigma\, K_\sigma c^\sigma e^{ct}}{f(D)} = e^{ct},$$

e quindi:

$$\frac{e^{ct}}{f(D)} = \frac{e^{ct}}{\Sigma\sigma\, K_\sigma c^\sigma} = \frac{e^{ct}}{f(c)},$$

come si era annunciato.

Con le notazioni $A_{\mu,\nu}(c_\pi)$, $B_\mu(c_\pi)$ e $\Delta(c_\pi)$ si vuole indicare che nelle $A_{\mu,\nu}$ e B_μ vanno sostituite successivamente in luogo della D le p radici della (4).

Le formole (3_1) e (3_2) forniscono sotto un aspetto semplice gli integrali delle (1), o, meglio, delle (1'). Tutto riesce espresso in funzione delle c_π.

Per la determinazione di queste costanti basterà poi dare i valori iniziali delle y_ν, di z e delle loro derivate fino all'ordine $s-1$. Infatti si avranno così

$$n+1+(s-1)(n+1)=s(n+1)=p$$

condizioni lineari e, in generale, non omogenee fra le p costanti.

Nella massima parte dei casi non si ha bisogno di determinare le costanti e costruire completamente gli integrali (3_1) e (3_2); ma interessa solo la conoscenza qualitativa del fenomeno e, in particolare, dei periodi che spettano al sistema considerato. Tutto si riduce allora a scrivere e risolvere la caratteristica (4). Come illustrazione del metodo può valere il problema trattato al capitolo terzo, nel quale è svolto per intero il calcolo delle costanti.

§ 3. *Note bibliografiche al Capitolo primo.* — Le prime tracce del metodo simbolico impiegato si trovano in Leibniz [1]; Lagrange insegnò a scrivere la serie di Taylor sotto la forma:

$$f(x+h)=e^{h\frac{d}{dx}}f(x),$$

e Laplace ne diede una dimostrazione rigorosa. Ma sono principalmente gli analisti inglesi del secolo scorso (Cayley, Sylvester, Boole, ecc.) che lavorarono allo sviluppo di questo algoritmo e ne fecero largo uso.

1) Citato dallo Schnuse nella prefazione alla versione tedesca del libro del Boole: Die Grundlehren der endlichen Differenzen-und Summenrechnung (Braunschweig, Leibrock, 1867).
" Hoc modo ipsas d tractari quasi literas (quantitat. algebr.) non considerando " ipsas x vel y, nisi tamquam afficientes literam d, versa rerum vice, cum illa d sit " tantum nota quaedam syncategorematica, x autem et y sint quantitates . . . „.

Il Boole [1]) scrisse in forma simbolica l' integrale di una equazione alle differenze finite, e il Forsyth [2]) fece altrettanto per le equazioni differenziali o rdinarie.

L' equazione (2) fu data la prima volta da Lord Rayleigh [3]) e la formula (3_2) da me [4]).

CAPITOLO SECONDO.

Scariche in un conduttore complesso.

§ 4. *Posizione del problema e sua soluzione generale.* — Un conduttore complesso sarà costituito in generale da certe p capacità, congiunte due a due da diversi fili; e questi siano in tutto in numero di m.

Chiameremo π, ρ, σ, τ gli indici correnti delle capacità, μ, ν gli indici correnti dei fili. Ogni capacità si distinguerà con un indice solo (come π) e ogni coppia di capacità con due indici (come π, σ); ogni filo si distinguerà con tre indici (come, π, ρ, μ), il primo e il secondo relativi alle capacità che il filo congiunge, il terzo relativo al filo stesso; finalmente ogni coppia di fili si distinguerà con sei indici (come π, ρ, μ, σ, τ, ν), i primi tre relativi al primo filo e gli ultimi al secondo.

Diremo q le cariche, K i coefficienti di potenziale, C le capacità (quando sarà conveniente introdurle), R le resistenze, L i coefficienti di autoinduzione, i le correnti, M i coefficienti di induzione mutua.

Si osserverà espressamente che $i_{\pi,\rho,\mu}$ è la corrente che va dalla π-esima alla ρ-esima capacità, seguendo il μ-esimo filo.

Si avrà:

$$i_{\pi,\pi,\mu} = 0\,,$$

(1)

$$i_{\pi,\rho,\mu} = - i_{\rho,\pi,\mu}\,.$$

1) L. c. pag. 106-133.

2) A. Russel Forsyth. Trattato sulle equazioni differenziali. Versione di A. Arbicone Livorno (Giusti, 1901) pag. 35 e seg., pag. 213 e seg.

3) Lord Rayleigh. Theory of Sound (London, Macmillan and Co., 1894-96). I, pag. 105.

4) A. Garbasso. Nouvelles Ann de Mathématiques, (4), II, 1902.

Le equazioni del problema sono divise in due serie: la prima serie è relativa ad ogni capacità e si scrive:

$$(2) \qquad \mathrm{D}\, q_\pi + \Sigma_\rho \Sigma_\mu\, i_{\pi,\rho,\mu} = 0\,,$$

la seconda è relativa ad ogni filo e si scrive:

$$(3) \qquad \Sigma_\tau\, \mathrm{K}_{\rho,\tau}\, q_\tau - \Sigma_\sigma\, \mathrm{K}_{\pi,\sigma}\, q_\sigma + \Sigma_\sigma \Sigma_\tau \Sigma_\nu\, \mathrm{N}_{\pi,\rho,\mu,\sigma,\tau,\nu}\, i_{\sigma,\tau,\nu} = 0\,,$$

intendendo che sia:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{\pi,\rho,\mu,\pi,\rho,\mu} &= \mathrm{R}_{\pi,\rho,\mu} + \mathrm{DL}_{\pi,\rho,\mu}\,, \\ \mathrm{N}_{\pi,\rho,\mu,\sigma,\tau,\nu} &= \mathrm{DM}_{\pi,\rho,\mu,\sigma,\tau,\nu}\,. \end{aligned} \qquad \left(\mathrm{D} = \frac{d}{dt}\right),$$

Il numero complessivo di queste equazioni si ottiene sommando il numero totale delle capacità col numero totale dei fili; esse sono dunque tante quante sono le incognite q ed i. Il resultato dell'eliminazione si esprime, come abbiamo veduto, applicando a ciascuna q ed a ciascuna i il determinante dei coefficienti. Ora, poichè ogni suo elemento è al massimo di primo grado in D, il determinante sarà una funzione di D di grado non superiore a

$$p + m.$$

In realtà però, svolgendo, si troverebbe che il grado è minore, e la cosa può anche riconoscersi a priori. Si avrà infatti per le (1) e (2):

$$\mathrm{D}\, \Sigma^\pi q^\pi = - \Sigma_\pi \Sigma_\rho \Sigma_\mu\, i_{\pi,\rho,\mu} = 0\,,$$

la quale equazione significa che la carica complessiva del conduttore rimane inalterata.

È quindi possibile fare in modo, con semplici addizioni di linee, che il D risulti fattore in una orizzontale del determinante; allora il grado (γ) di quest' ultimo diventa:

$$\gamma = p + m - 1.$$

Se dunque si studia un conduttore comunque complesso ogni sua carica ed ogni sua corrente è determinata da un' equazione differenziale lineare ed omogenea (la stessa per tutte le variabili), il cui ordine è inferiore di uno alla

somma, che si ottiene aggiungendo al numero delle capacità il numero dei fili.

La caratteristica di tale equazione, che per brevità chiameremo nel seguito *caratteristica del conduttore*, si scrive ponendo senz' altro a zero il determinante e considerando in esso il D come un' incognita e non più come un simbolo operatorio; avrà in generale il grado $p + m - 1$.

Così, per esempio, se si tratta di due capacità riunite da un unico filo, come nel caso classico di Lord Kelvin, la caratteristica diventa di secondo grado.

Se le capacità sono due ed m i fili, il grado della caratteristica è $m + 1$.

Se si avesse un conduttore costituito secondo lo schema della benzina, come fu disegnato dal Kékulé, e si interpretassero gli atomi come capacità e i tratti di linea, relativi alle valenze, come fili, la caratteristica risulterebbe di ventesimosesto grado.

In pratica il procedimento di calcolo che abbiamo seguito non suole essere conveniente, perchè, se appena la struttura del conduttore si complica un poco, l' ordine del determinante appare elevatissimo, ed il suo svolgimento diviene lungo e penoso.

È più comodo eliminare le cariche dalle (3) per mezzo delle (2); si ottiene così un sistema di m equazioni fra le m correnti, e l' ordine del determinante si riduce anche ad m. Naturalmente con questo non muta la natura e il grado della caratteristica.

Converrà anche distinguere i diversi fili con un solo numero progressivo, e mettere le (3) sotto la nuova forma:

$$(4) \qquad \sum_{1}^{m}{}_{\nu}\, P_{\mu,\nu}\, i_{\nu} = 0\,, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m$$

la caratteristica si riduce allora all' aspetto semplice:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \ldots & P_{m,m} \end{vmatrix} = 0\,.$$

§ 5. *Conduttore ad una sola oscillazione.* — Passiamo adesso allo studio di qualche caso particolare, sia per vedere come si applichi in pratica il metodo indicato nell' ultimo paragrafo, sia per dedurre alcuni resultati, che saranno utili nel seguito della ricerca.

Il conduttore più semplice, che si possa imaginare, è costituito da due capacità congiunte da un filo (fig. 1 *a*); in questo caso le (2) diventano:

$$(2') \qquad \begin{cases} D q_1 + i = 0 , \\ D q_2 - i = 0 , \end{cases}$$

e il sistema (3) si riduce all' unica equazione:

$$(3') \qquad K_{2,1} q_1 + K_{2,2} q_2 - (K_{1,1} q_1 + K_{1,2} q_2) + (R + L D) i = 0 ,$$

ossia, ordinando:

$$(K_{2,1} - K_{1,1}) q_1 + (K_{2,2} - K_{1,2}) q_2 + (R + L D) i = 0 ;$$

si ottiene dunque la caratteristica:

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 1 \\ 0 & D & -1 \\ K_{2,1}-K_{1,1} & K_{2,2}-K_{1,2} & R+LD \end{vmatrix} = D . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & D & -1 \\ K_{2,1}-K_{1,1} & K_{2,2}-K_{1,2} & R+LD \end{vmatrix}$$

$$= D . [(R + L D) D + K_{1,1} + K_{2,2} - (K_{1,2} + K_{2,1})] = 0 ,$$

$$= D . [(R + L D) D + K_{1,1} + K_{2,2} - 2 K_{1,2}] = 0 ,$$

essendo in generale:

$$K_{\pi,\sigma} = K_{\sigma,\pi} .$$

Ma la stessa equazione si poteva ottenere molto più presto eliminando le q dalla (3') per mezzo delle (2'). Se la resistenza è piccola il conduttore emetterà una riga col periodo:

$$(*) \qquad T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{K_{1,1} + K_{2,2} - 2 K_{1,2}}} .$$

In particolare può avvenire che le azioni elettrostatiche fra le cariche libere siano trascurabili, e allora risulta:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{K_{1,1} + K_{2,2}}} ;$$

in quest' ultimo caso i coefficienti di potenziale sono semplicemente i reciproci delle capacità, quindi si può scrivere:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L C_1 C_2}{C_1 + C_2}} .$$

Per:

$$C_1 = C ,$$
$$C_2 = \infty ,$$

viene poi:

(**) $$T = 2\pi \sqrt{L C} ,$$

e per:

$$C_1 = C_2 = C ,$$

viene:

(***) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2}} ,$$

formole notissime.

Nel seguito, per non complicare troppo i calcoli, supporrò sempre che sia:

$$K_{\pi,\sigma} = 0 \quad (\pi \text{ diverso da } \sigma) ,$$

e introdurrò le capacità in luogo dei coefficienti di potenziale.

§ 6. *Conduttore a due oscillazioni.* — Si abbiano adesso tre capacità identiche, riunite da due fili, uguali fra loro, rettilinei e ortogonali (fig. 1 *b*). Distinguendo i fili con gli indici 1 e 2 si scriverà il sistema (4) sotto la forma:

$$\begin{cases} \left[(R + L D) D + \frac{2}{C}\right] i_1 - \frac{1}{C} i_2 = 0 , \\ \left[(R + L D) D + \frac{2}{C}\right] i_2 - \frac{1}{C} i_1 = 0 , \end{cases}$$

se ora si pone:

$$(R + L D) D + \frac{2}{C} = S ,$$

$$- \frac{1}{C} = r ,$$

la caratteristica del conduttore diventerà:

$$\begin{vmatrix} S & r \\ r & S \end{vmatrix} = S^2 - r^2 = (S - r)(S + r) = 0 .$$

Qui le onde sono due, e i loro periodi sono definiti dalle relazioni:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{LC} ,$$
$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{3}} .$$

§ 7. *Conduttore a tre oscillazioni*. — Il caso immediatamente successivo è quello di quattro capacità tutte uguali, congiunte da tre fili (1, 2, 3) rettilinei, uguali fra loro, e paralleli ordinatamente agli spigoli di un triedro trirettangolo (fig. 1 *c*).

Le equazioni (4) diventano:

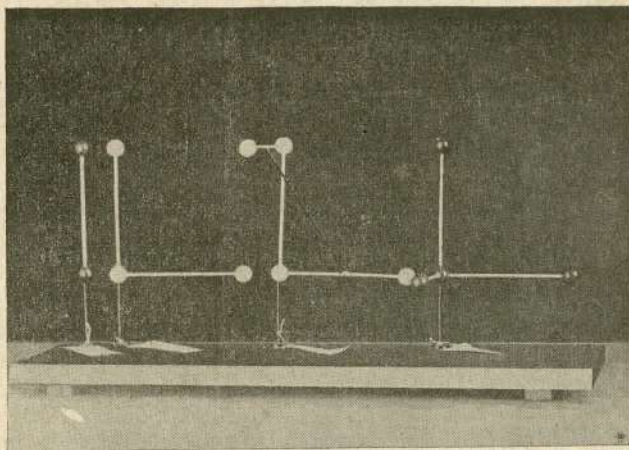
$$\left\{ \begin{array}{l} \left[(R + LD) D + \frac{2}{C} \right] i_1 - \frac{1}{C} i_2 = 0 , \\ \left[(R + LD) D + \frac{2}{C} \right] i_2 - \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_3 = 0 , \\ \left[(R + LD) D + \frac{2}{C} \right] i_3 - \frac{1}{C} i_2 = 0 , \end{array} \right.$$

a *b* *c* *d*

Fig. 1. — *a*) Conduttore ad una sola oscillazione. *b*) Conduttore a due oscillazioni. *c*) Conduttore a tre oscillazioni. *d*) Conduttore le cui oscillazioni si riducono a due.

e con i soliti simboli la caratteristica si scrive:

$$\begin{vmatrix} S & r & 0 \\ r & S & r \\ 0 & r & S \end{vmatrix} = S(S^2 - 2r^2),$$

$$= S(S + r\sqrt{2})(S - r\sqrt{2}) = 0.$$

Vi sono dunque nello spettro tre righe, corrispondenti ai periodi:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2-\sqrt{2}}},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}},$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2+\sqrt{2}}}.$$

§ 8. *Un altro conduttore a tre oscillazioni.* — Negli esempii, che abbiamo trattato al penultimo e all' ultimo paragrafo, il calcolo è reso semplice per il fatto che l' induzione mutua è ridotta a zero. Le formole ottenute hanno però una importanza maggiore di ciò, che si potrebbe credere a prima vista; in quanto esse valgono per approssimazione anche se i fili costituenti i conduttori si orientano in altro modo, purchè codesti fili siano lunghi in confronto del loro diametro.

L' esame di un caso particolare riesce opportuno per mettere in chiaro la proprietà di cui si tratta. Supporremo che il conduttore sia nuovamente costituito da tre pezzi di filo (uguali) e quattro capacità, anche uguali fra loro; ma i fili vogliamo che siano secondo una medesima retta, e le capacità saranno dischi di lamiera, forati normalmente nel centro (fig. 8 *b* e fig. 8 *c*).

Chiameremo M il coefficiente di induzione relativo a due fili vicini (1,2; 2,1; 2,3; 3,2) e m il coefficiente per la coppia di due fili lontani (1,3; 3,1); ponendo per semplicità:

$$\Sigma = D^2 M - \frac{1}{C},$$

$$\sigma = D^2 m,$$

la caratteristica del conduttore diventa:

$$\begin{vmatrix} S & \Sigma & \sigma \\ \Sigma & S & \Sigma \\ \sigma & \Sigma & S \end{vmatrix} = (S - \sigma)(S^2 + \sigma S - 2\Sigma^2) = 0 .$$

Se ora si effettua lo svolgimento, si trascurano le resistenze e si pone ancora:

$$a = L^2 + L m - 2 M^2 ,$$

$$b = \frac{2}{C}(2L + m + 2M) ,$$

$$c = \frac{2}{C^2} ,$$

risulta:

$$\left[(L - m) D^2 + \frac{2}{C}\right](a D^4 + b D^2 + c) = 0$$

e quindi:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}} ,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{(L - m) C}{2}} ,$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}} .$$

Adesso bisogna naturalmente calcolare M ed m, ma la cosa è subito fatta se si suppone di conoscere L; perchè, chiamando l la lunghezza di ciascun tratto di filo, verrà:

$$L(2l) = 2L(l) + 2M ,$$

e quindi:

(*) $$M = \frac{1}{2}[L(2l) - 2L(l)] ;$$

similmente:

$$L(3l) = 3L(l) + 4M + 2m ,$$

e dunque:

(**) $$m = \frac{1}{2} [L(3l) - 3L(l) - 4M].$$

A questo punto si noti che, secondo una formola del Poincaré, è:

$$L(l) = 2l\left(\log\frac{4l}{d} - 1\right),$$

ove con d si indichi il diametro del filo.

Sostituendo nelle (*) e (**) risulta dunque:

$$M = l \log 4,$$

$$m = l \log\frac{27}{16}.$$

Le espressioni di L, M ed m fanno vedere che, mentre la prima grandezza dipende da l e dal rapporto $\frac{l}{d}$, le ultime due sono funzioni della sola l. È poi chiaro che al diminuire della d la L cresce; se dunque i fili sono lunghi e sottili l'induzione mutua sarà piccola davanti all'autoinduzione.

La ragione fisica di questo fatto sta in ciò che una corrente, distribuita in un mantello cilindrico, agisce all'esterno come se fosse concentrata su l'asse; il resultato è dunque generale, più che non possa apparire dal caso che si è considerato.

§ 9. *Conduttori a quattro e cinque oscillazioni.* — Volendo procedere al calcolo di conduttori sempre più complessi noi supporremo precisamente che i fili, di cui sono costituiti, siano lunghi e sottili.

Se per esempio vi sono in tutto cinque capacità (uguali), riunite due a due da quattro fili, uguali anche fra loro, come nella figura 8 a, la caratteristica si potrà scrivere sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 \\ 0 & r & S & r \\ 0 & 0 & r & S \end{vmatrix} = S^4 - 3r^2S^2 + r^4 = 0.$$

dalla quale si deducono i periodi:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2 - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}},$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}},$$

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}}.$$

Se le capacità sono sei, tutte uguali, congiunte due a due da cinque fili pure eguali, viene come caratteristica:

$$\begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & 0 \\ 0 & 0 & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & r & S \end{vmatrix} = S(S^4 - 4r^2S^2 + 3r^4) = 0,$$

e di qui si ricavano i periodi:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2-\sqrt{3}}},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{LC},$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2}},$$

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{3}},$$

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2+\sqrt{3}}}$$

Sarebbe facile scrivere, con le solite ipotesi, le caratteristiche di conduttori sempre più complessi, ma per ora non ne abbiamo bisogno. Ritorneremo su l' argomento più tardi.

§ 10. *Conduttori per i quali si abbassa il numero delle oscillazioni: caso particolare.* — La regola del paragrafo 4, secondo la quale il grado della caratteristica si calcola con la formola:

$$\gamma = p + m - 1 ,$$

assegna in realtà un valore massimo; non è escluso che, per una scelta particolare delle costanti, o una disposizione speciale dell' apparecchio, il grado si abbassi o certe radici diventino doppie o multiple. Può servire come esempio il caso del conduttore rappresentato dalla figura 1 *d*.

Si tratta di quattro capacità identiche, riunite due a due da tre fili rettilinei, uguali, e disposti secondo gli spigoli di un triedro trirettangolo.

Il sistema (4) prende la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[(R + L D) D + \frac{2}{C}\right] i_1 + \frac{1}{C} i_2 + \frac{1}{C} i_3 = 0 , \\ \left[(R + L D) D + \frac{2}{C}\right] i_2 + \frac{1}{C} i_3 + \frac{1}{C} i_1 = 0 , \\ \left[(R + L D) D + \frac{2}{C}\right] i_3 + \frac{1}{C} i_1 + \frac{1}{C} i_2 = 0 , \end{array}\right.$$

e la caratteristica diventa:

$$\begin{vmatrix} S & -r & -r \\ -r & S & -r \\ -r & -r & S \end{vmatrix} = S (S^2 - r^2) - 2 r^2 (S + r) ,$$

$$= (S - 2 r) (S + r)^2 = 0 .$$

Quindi rimangono solamente due righe, determinate dai periodi:

$$T_1 = 2 \pi \sqrt{L C} ,$$

$$T_2 = 2 \pi \frac{\sqrt{L C}}{2} ,$$

e una costituisce l' ottava dell' altra.

§ 11. *Note bibliografiche al Capitolo secondo.* — Il caso di un conduttore ad una sola oscillazione, come più semplice e più facile a realizzare, fu naturalmente studiato per primo; e la teoria di Sir W. Thomson (Lord Kelvin) ad esso relativa rimane classica.

La formula (**) del paragrafo quinto si deve appunto al Thomson, la (***) invece appartiene al Poincaré [1], e la (*), più generale, al Morera [2].

Il Sig. v. Geitler [3] ha studiato il problema di n capacità riunite due a due da $n-1$ fili, nel caso particolare in cui le resistenze e le induzioni mutue sono trascurabili; egli stabilisce che un circuito di codesto tipo emette uno spettro di $n-1$ righe, la quale cosa è in perfetto accordo col teorema del paragrafo quarto.

Essendo:

$$p = n,$$

$$m = n - 1,$$

viene infatti:

$$\gamma = p + m - 1 = n + (n-1) - 1 = 2(n-1).$$

La soluzione del problema più generale fu data la prima volta da me, e anche il resto va a mio conto [4].

---

1) H. Poincaré. Électricité et Optique (Paris, Carré, 1890-91). II, pag. 151.
2) G. Morera. N. Cim., (5), III, 1902.
3) J. v. Geitler. Wied. Ann., LV, 1895.
4) A. Garbasso. Mem. R. Acc. di Torino, (2), LIII, 1903.

Scariche di un condensatore secondo più fili in parallelo.

§ 12. *Posizione del problema e sua soluzione generale.* — Il problema delle scariche di un condensatore secondo n fili in parallelo costituisce una generalizzazione di quello da noi studiato al paragrafo quinto.

Indicando ciascun filo con un indice solo, potremo scrivere i sistemi (2) e (3) del capitolo secondo sotto la forma:

$$\begin{cases} D q_1 + \sum_1^n {}_\nu \, i_\nu = 0 \, , \\ D q_2 - \sum_1^n {}_\nu \, i_\nu = 0 \, , \end{cases}$$

e:

$$K_{2\mu 1} \, q_1 + K_{2\mu 2} \, q_2 - (K_{1\mu 1} \, q_1 + K_{1\mu 2} \, q_2) + \sum_1^n {}_\nu \, A_{\mu,\nu} \, i_\nu = 0 \, ,$$

$$(\mu = 1 \, . \, 2 \ldots n)$$

con:

$$R_\nu + D L_\nu = A_{\nu,\nu} \, ,$$

$$D M_{\mu,\nu} = A_{\mu,\nu} \, . \qquad (\mu \text{ diverso da } \nu).$$

Supponiamo adesso che le cariche su le due capacità siano da principio uguali e di segno contrario; esse resteranno tali per tutta la durata del fenomeno, e si avrà più semplicemente:

$$D q + \sum_1^n {}_\nu \, i_\nu = 0 \, ,$$

$$[2 K_{1\mu 2} - (K_{1\mu 1} + K_{2\mu 2})] \, q + \sum_1^n {}_\nu \, A_{\mu,\nu} \, i_\nu = 0 \, ,$$

le quali equazioni hanno esattamente la forma delle (1') del capitolo primo.

Ponendo, per comodità di scrittura:

$$2\,K_{1,2} - (K_{1,1} + K_{2,2}) = B\,,$$

viene dunque per la q (e per ogni i_ν) l'equazione differenziale:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu} & A_{1,\nu+1} & \cdots & A_{1,n} & B \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu} & A_{2,\nu+1} & \cdots & A_{2,n} & B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \cdots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu} & A_{\mu,\nu+1} & \cdots & A_{\mu,n} & B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & D \end{vmatrix} q = 0\,,$$

e si hanno per la q e le i_ν (secondo le 3_1 e 3_2 del capitolo primo) le espressioni:

$$q = \sum_1^p {}_\pi\, C_\pi\, e^{c_\pi t}\,,$$

$$(p = n + 1)$$

e:

$$i_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\Delta} \begin{vmatrix} B & A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu+1} & \cdots & A_{1,n} \\ B & A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B & A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \cdots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu+1} & \cdots & A_{\mu,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B & A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,\nu-1} & A_{\nu,\nu+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

dove con Δ si è indicato, come al paragrafo secondo, il determinante delle A.

Per la determinazione delle costanti C basta dare la q e le correnti al tempo zero.

§ 13. *Caso in cui i fili di scarica non agiscono per induzione mutua.* — Se si esclude l' azione elettrodinamica fra filo e filo, se cioè si pone:

$$A_{\mu,\nu} = 0 , \qquad (\mu \text{ diverso da } \nu)$$

le equazioni diventano:

$$D q + \sum_1^n{}_\nu\, i_\nu = 0 ,$$

$$B q + A_\nu i_\nu = 0 , \qquad (\nu = 1 . 2 \dots n)$$

essendosi scritto adesso A_ν in luogo di $A_{\nu,\nu}$.

Eliminando le i_ν si ottiene:

$$\left(D - \sum_1^n{}_\nu \frac{B}{A_\nu}\right) q = 0 .$$

Si ponga per A_ν la sua espressione e si trasformi; verrà successivamente:

$$\left(D - \sum_1^n{}_\nu \frac{B}{R_\nu + D L_\nu}\right) q = 0 ,$$

ossia:

$$\left(D - \sum_1^n{}_\nu \frac{B / L_\nu}{R_\nu / L_\nu + D}\right) q = 0 ,$$

o ancora:

$$\left(D + \sum_1^n{}_\nu \frac{l_\nu}{r_\nu + D}\right) q = 0 ,$$

con:

$$\begin{cases} l_\nu = - B / L_\nu , \\ r_\nu = R_\nu / L_\nu . \end{cases}$$

Quando fosse:

$$r_\nu = r ,$$

$$(\nu = 1 . 2 \dots n)$$

quando cioè le resistenze dei singoli fili fossero proporzionali ai coefficienti di autoinduzione, si potrebbe scrivere subito:

$$[(r + D) D + \sum_{1}^{n} \nu\, l_\nu]\, q = 0;$$

basta confrontare questa equazione con quella da noi studiata al paragrafo quinto per ricavarne senz'altro che, nelle ipotesi fatte, *il sistema degli n fili può venire sostituito con un unico conduttore.*

È facile vedere che le costanti del filo equivalente vanno calcolate con le formole:

$$\frac{1}{R} = \sum_{1}^{n} \nu \frac{1}{R_\nu},$$

e:

$$\frac{1}{L} = \sum_{1}^{n} \nu \frac{1}{L_\nu}.$$

§ 14. *I fili si riducono a due.* — Lo studio delle equazioni trovate nel paragrafo decimosecondo non può portare a nessun resultato utilizzabile, almeno per ora, non esistendo ricerche sperimentali in proposito.

Solamente per il caso di

$$n = 2$$

il confronto si può fare, impiegando i dati del Cardani.

In questa ipotesi viene:

$$(1) \qquad \begin{cases} D\,q + i_1 + i_2 = 0, \\ B\,q + (R_1 + D\,L_1)\, i_1 + M\,D\, i_2 = 0, \\ B\,q + M\,D\, i_1 + (R_2 + D\,L_2)\, i_2 = 0; \end{cases}$$

e però la q e le i soddisferanno all' equazione differenziale:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} R_1 + D\,L_1 & M\,D & B \\ M\,D & R_2 + D\,L_2 & B \\ 1 & 1 & D \end{vmatrix} q = 0.$$

La q dunque si può scrivere sotto la forma:

$$q = A\, e^{at} + B\, e^{bt} + C\, e^{ct} \text{ [1]}, \tag{3}$$

essendo a, b, c le radici della caratteristica:

$$\begin{vmatrix} R_1 + D L_1 & M D & B \\ M D & R_2 + D L_2 & B \\ 1 & 1 & D \end{vmatrix} = 0; \tag{4}$$

e le i prendono le espressioni:

$$i_1 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} B & M D \\ B & R_2 + D L_2 \end{vmatrix} q,$$

$$i_2 = +\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} B & R_1 + D L_1 \\ B & M D \end{vmatrix} q,$$

ossia:

$$\begin{aligned} i_1 &= B \cdot \frac{A\,(M a - R_2 - a L_2)}{(R_1 + a L_1)(R_2 + a L_2) - M^2 a^2}\, e^{at} + \ldots, \\ i_2 &= B \cdot \frac{A\,(M a - R_1 - a L_1)}{(R_1 + a L_1)(R_2 + a L_2) - M^2 a^2}\, e^{at} + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

Svolgendo la (4) si ottiene:

$$\begin{aligned} (L_1 L_2 - M^2) D^3 &+ (L_1 R_2 + L_2 R_1) D^2 + \\ &+ [R_1 R_2 - (L_1 + L_2 - 2 M) B] D - (R_1 + R_2) B = 0, \end{aligned} \tag{4'}$$

e per mezzo di questa le (5) si possono mettere sotto la forma:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{-B + a^2 M}{a (L_1 - M) + R_1}\, A\, e^{at} + \ldots, \\ i_2 &= \frac{-B + a^2 M}{a (L_2 - M) + R_2}\, A\, e^{at} + \ldots, \end{aligned} \tag{5'}$$

1) Scriviamo per semplicità A, B, C, a, b, c in luogo di C_1, C_2, C_3, c_1, c_2, c_3.

Una forma anche più comoda e simmetrica si può ottenere se in luogo delle sei costanti R_1 . R_2 . L_1 . L_2 . M e B se ne introducono altre sei per mezzo delle relazioni:

$$r_1 = \frac{R_1}{L_1 - M}, \quad l_1 = \frac{-B}{(L_1 - M)}, \quad m_1 = \frac{M}{L_1 - M},$$

$$r_2 = \frac{R_2}{L_2 - M}, \quad l_2 = \frac{-B}{(L_2 - M)}, \quad m_2 = \frac{M}{L_2 - M}.$$

Risulta in questo modo:

$$(4'') \qquad (1 + m_1 + m_2) D^3 + [r_1 (1 + m_2) + r_2 (1 + m_1)] D^2 + \\ + (l_1 + l_2 + r_1 r_2) D + r_1 l_2 + r_2 l_1 = 0,$$

$$(5'') \qquad \begin{aligned} i_1 &= \frac{l_1 + a^2 m_1}{a + r_1} A e^{at} + \frac{l_1 + b^2 m_1}{b + r_1} B e^{bt} + \frac{l_1 + c^2 m_1}{c + r_1} C e^{ct}, \\ i_2 &= \frac{l_2 + a^2 m_2}{a + r_2} A e^{at} + \frac{l_2 + b^2 m_2}{b + r_2} B e^{bt} + \frac{l_2 + c^2 m_2}{c + r_2} C e^{ct}. \end{aligned}$$

Finalmente, se si ammette che la induzione fra i due fili sia trascurabile, viene ancora:

$$(4''') \qquad D^3 + (r_1 + r_2) D^2 + (l_1 + l_2 + r_1 r_2) D + l_1 r_2 + l_2 r_1 = 0,$$

$$(5''') \qquad \begin{aligned} i_1 &= l_1 \left(\frac{A}{a + r_1} e_{at} + \frac{B}{b + r_1} e_{bt} + \frac{C}{c + r_1} e_{ct} \right), \\ i_2 &= l_2 \left(\frac{A}{a + r_2} e_{at} + \frac{B}{b + r_2} e_{bt} + \frac{C}{c + r_2} e_{ct} \right). \end{aligned}$$

§ 15. *Radici della caratteristica.* — Riservandoci di impiegare più tardi le equazioni (4") e (5") vogliamo continuare adesso la discussione del problema prendendo come base queste formole semplici.

Si osserverà anzitutto che la caratteristica deve avere sempre una radice reale; le altre due o sono reali anch' esse o sono imaginarie e coniugate.

Le radici reali saranno necessariamente negative perchè i coefficienti della (4''') sono tutti maggiori di zero; ma è fa-

cile vedere che anche le parti reali delle radici imaginarie (quando vi siano) avranno il segno meno.

Poniamo infatti che due radici siano della forma $a + bi$ e $a - bi$, e la terza continuiamo a chiamarla c. Se si scrive per brevità:

$$P = r_1 + r_2,$$
$$Q = l_1 + l_2 + r_1 r_2,$$
$$R = l_1 r_2 + l_2 r_1,$$

verrà subito:

$$P = -(2a + c),$$
$$Q = 2ac + a^2 + b^2,$$
$$R = -(a^2 + b^2)c.$$

Sono queste tre equazioni per a, c e $a^2 + b^2$; eliminando c e $a^2 + b^2$ risulta:

$$Q(2a + P) + 2a(2a + P)^2 - R = 0,$$

e quindi:

$$8a^3 + 8Pa^2 + 2(Q + P^2)a + PQ - R = 0.$$

I coefficienti di a^3. a^2 ed a si riconoscono subito come positivi, ma anche il termine indipendente è maggiore di zero, avendosi:

$$PQ - R = l_1 r_1 + l_2 r_2 + r_1 r_2 (r_1 + r_2);$$

ne segue che la a dovrà essere negativa, come si era annunciato.

§ 16. *Quantità di elettricità.* — Premesso questo, se si tornano a indicare, come al § 14, con a, b e c le radici della caratteristica (4'''), potremo scrivere:

$$\int_0^\infty e^{at}\,dt = -\frac{1}{a},$$

$$\int_0^\infty e^{bt}\,dt = -\frac{1}{b},$$

$$\int_0^\infty e^{ct}\,dt = -\frac{1}{c},$$

comunque siano poi le a, b e c, reali cioè o imaginarie.

Abbiamo dunque modo di calcolare le quantità complessive di elettricità, q_1 e q_2, che passano per i due fili.

Sarà:

$$q_1 = -l_1\left(\frac{A}{a(a+r_1)} + \frac{B}{b(b+r_1)} + \frac{C}{c(c+r_1)}\right),$$

$$q_2 = -l_2\left(\frac{A}{a(a+r_2)} + \frac{B}{b(b+r_2)} + \frac{C}{c(c+r_2)}\right).$$

Sommando questi valori si ottiene:

$$q_1+q_2 = -A\left(\frac{l_1}{a(a+r_1)} + \frac{l_2}{a(a+r_2)}\right) - B\left(\frac{l_1}{b(b+r_1)} + \frac{l_2}{b(b+r_2)}\right) - C\left(\frac{l_1}{c(c+r_1)} + \frac{l_2}{c(c+r_2)}\right).$$

Proviamoci a sviluppare, a modo di esempio, il coefficiente di A. Viene:

$$\frac{l_1}{a(a+r_1)} + \frac{l_2}{a(a+r_2)} = \frac{l_1(a+r_2) + l_2(a+r_1)}{a(a+r_1)(a+r_2)},$$

$$= \frac{(l_1+l_2)a + l_1 r_2 + l_2 r_1}{a^3 + (r_1+r_2)a^2 + r_1 r_2 a};$$

ma per la (4'''):

$$(l_1+l_2)a + l_1 r_2 + l_2 r_1 = -[a^3 + (r_1+r_2)a^2 + r_1 r_2 a],$$

dunque:

$$\frac{l_1}{a(a+r_1)} + \frac{l_2}{a(a+r_2)} = -1.$$

Dei resultati analoghi si otterrebbero calcolando le parentesi che moltiplicano B e C; sicchè da ultimo si ricava:

$$q_1 + q_2 = A + B + C,$$

$$= q_0;$$

la quale cosa del resto, per ragioni puramente fisiche, poteva asserirsi *a priori* [1]).

§ 17. *Determinazione delle costanti.* — Passiamo adesso a determinare le tre costanti di integrazione. Noi ammetteremo all' uopo che debba essere all' origine del tempo:

$$i_1 = i_2 = 0,$$

e di più, come s' è già detto:

$$q = q_0.$$

In modo più esplicito risulta:

$$\frac{A}{a + r_1} + \frac{B}{b + r_1} + \frac{C}{c + r_1} = 0,$$

$$\frac{A}{a + r_2} + \frac{B}{b + r_2} + \frac{C}{c + r_2} = 0,$$

$$A + B + C = q_0.$$

Risolvendo queste tre equazioni rispetto ad A, B e C si ricava:

$$(6) \qquad \begin{aligned} A &= q_0 \frac{(c - b)(a + r_1)(a + r_2)}{a^2 (c - b) + b^2 (a - c) + c^2 (b - a)}, \\ B &= q_0 \frac{(a - c)(b + r_1)(b + r_2)}{a^2 (c - b) + b^2 (a - c) + c^2 (b - a)}, \\ C &= q_0 \frac{(b - a)(c + r_1)(c + r_2)}{a^2 (c - b) + b^2 (a - c) + c^2 (b - a)}. \end{aligned}$$

§ 18. *Quantità di calore.* — Avendosi per le (5'''):

$$i_1 = l_1 \left(\frac{A}{a + r_1} e^{at} + \frac{B}{b + r_1} e^{bt} + \frac{C}{c + r_1} e^{ct} \right),$$

1) Ho fatto vedere in una nota precedente (N. Cim. (5), III, 1902) che fra le q e le R sussiste la relazione:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

potremo scrivere subito:

$$i_1^2 = l_1^2 \left(\frac{A^2}{(a+r_1)^2} e^{2at} + \dots + 2 \frac{AB}{(a+r_1)(b+r_1)} e^{(a+b)t} + \dots \right),$$

e quindi anche:

$$Q_1 = R_1 \int_0^\infty i_1^2 dt = -R_1 l_1^2 \left(\frac{A^2}{2a(a+r_1)^2} + \dots + 2 \frac{AB}{(a+b)(a+r_1)(b+r_1)} + \dots \right).$$

Una formola simile vale naturalmente per il secondo filo.

Per procedere innanzi nel calcolo bisogna precisare il significato della costante B; essendo, secondo la definizione, (paragrafo decimosecondo):

$$B = 2\,K_{1,2} - (K_{1,1} + K_{2,2}),$$

se si suppone di studiare il caso di un' unica capacità, che per due fili si scarica a terra, verrà:

$$B = -K_{1,1} = -\frac{1}{C},$$

e quindi:

$$l_1 = \frac{1}{L_1 C}, \quad l_2 = \frac{1}{L_2 C}.$$

Utilizzando queste formole, con un calcolo semplicissimo, si può verificare che è:

$$(\S) \qquad Q_1 + Q_2 = \frac{q_0^2}{2C},$$

equazione il cui significato fisico è immediatamente chiaro; essa dice infatti che la somma delle quantità di calore svolte nei due fili è uguale all' energia raccolta da principio sul condensatore.

Nella riduzione è necessario tener conto delle (6); e si capisce del resto che l' origine non potrebbe essere arbitraria: se si cominciasse per esempio a contare il tempo da un istante in cui la q è zero una relazione come la (§) sarebbe assurda. Bisogna invece che da principio l' energia del sistema sia interamente di natura elettrostatica.

§ 19. *Due radici della caratteristica sono imaginarie e coniugate.* — Premesso tutto questo veniamo a discutere il caso che per la pratica è più importante, quello cioè nel quale delle radici della caratteristica due sono imaginarie e coniugate.

A tale scopo formiamo anzitutto la trasformata della (4'''), che manca del termine di secondo ordine. Bisognerà fare:

$$D = y - \frac{P}{3},$$

con che si ottiene;

$$y^3 + \left(Q - \frac{P^2}{3}\right) y + \frac{2P^3}{27} - \frac{PQ}{3} + R = 0,$$

o, se si pone per comodità di scrittura:

$$p = Q - \frac{P^2}{3},$$

$$q = \frac{2P^3}{27} - \frac{PQ}{3} + R,$$

$$y^3 + py + q = 0.$$

La condizione perchè quest' ultima equazione abbia due radici imaginarie, può scriversi, come è noto, sotto la forma:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0;$$

e poichè sostituendo risulta:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{108}(4P^3R - P^2Q^2 - 18PQR + 4Q^3 + 27R^2)$$

avremo da ultimo:

$$4P^3R + 4Q^3 + 27R^2 > P^2Q^2 + 18PQR,$$

o, che fa lo stesso:

$$(7)\quad \begin{gathered} 4(r_1 + r_2)^3(l_1r_2 + l_2r_1) + 4(l_1 + l_2 + r_1r_2)^3 + 27(l_1r_2 + l_2r_1)^2 > \\ > (r_1 + r_2)^2(l_1 + l_2 + r_1r_2)^2 + 18(r_1 + r_2)(l_1 + l_2 + r_1r_2)(l_1r_2 + l_2r_1). \end{gathered}$$

È, come si vede, una condizione molto complessa, dalla quale difficilmente si può cavare un significato fisico chiaro.

Possiamo però stabilire una proposizione, che generalizza un teorema ben noto del Thomson; *se, cioè, i termini in* $r_1^2 \,.\, r_2^2$ *e* $r_1 r_2$ *sono trascurabili rispetto a quelli in* l_1 *e* l_2 *la* (7) *è certamente verificata* [1]).

Infatti in questa ipotesi viene anzitutto:

$$4(r_1+r_2)^3(l_1 r_2+l_2 r_1)+4(l_1+l_2)^3+27(l_1 r_2+l_2 r_1)^2 >$$
$$> (r_1+r_2)^2(l_1+l_2)^2+18(r_1+r_2)(l_1+l_2)(l_1 r_2+l_2 r_1);$$

vi sono adesso dei termini delle tre forme seguenti:

$$l^3 \,.\, l r^4 \quad \text{e} \quad l^2 r^2$$

ossia:

$$l(l^2+r^4) \quad \text{e} \quad l^2(l+r^2);$$

per quanto si è stabilito i primi e i secondi si riducono ai termini in l^3; sicchè la condizione diventa:

$$4(l_1+l_2)^3 > 0,$$

che è sempre verificata.

L'ipotesi fatta del resto è sufficiente perchè due radici risultino imaginarie, ma non è necessaria, come si riconosce subito discutendo qualche caso particolare.

Ciò posto, vogliamo ammettere che delle tre radici due siano appunto complesse: per esempio a e b. Scriveremo in questo caso:

$$a = -\alpha + \beta i,$$
$$b = -\alpha - \beta i,$$

e per simmetria:

$$c = -\gamma;$$

1) Nel caso di un filo unico la caratteristica è:

$$D^2 + rD + l = 0,$$

quindi:

$$D = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - l},$$

sicchè le radici saranno certamente imaginarie se r^2 è trascurabile davanti a l.

α, β e γ possono riguardarsi adesso come quantità reali e positive.

Risulterà immediatamente, per le (6):

$$A = q_0 \frac{(c+\alpha+\beta i)(-\alpha+\beta i+r_1)(-\alpha+\beta i+r_2)}{(-\alpha+\beta i)^2(c+\alpha+\beta i)+(\alpha+\beta i)^2(-\alpha+\beta i-c)-2c^2\beta i},$$

$$B = q_0 \frac{(c+\alpha-\beta i)(-\alpha-\beta i+r_1)(-\alpha-\beta i+r_2)}{(-\alpha-\beta i)^2(c+\alpha-\beta i)+(\alpha-\beta i)^2(-\alpha-\beta i-c)+2c^2\beta i},$$

$$C = \Gamma = q_0 \frac{-2\beta i(c+r_1)(c+r_2)}{(\alpha-\beta i)^2(c+\alpha+\beta i)-(\alpha+\beta i)^2(\alpha-\beta i+c)-2c^2\beta i}.$$

A e B sono dunque imaginarii e coniugati, la C invece risulta reale, come si poteva asserire *a priori*. Svolgendo viene:

$$(6') \qquad A = \mathbf{A} + \mathbf{B} i, \qquad B = \mathbf{A} - \mathbf{B} i,$$

con:

$$(6') \qquad \mathbf{A} = q_0 \frac{r_1 r_2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2(2\alpha\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)}, \qquad \mathbf{B} = q_0 \frac{r_1 r_2(\gamma-\alpha) - \alpha(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{2\beta(2\alpha\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)},$$

e:

$$(6') \qquad \Gamma = q_0 \frac{2\alpha\gamma - r_1 r_2}{2\alpha\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}.$$

Con le nuove notazioni anche la (3) e (5'') prendono un aspetto particolare.

Risulta infatti, dopo alcuni calcoli semplicissimi:

$$(3') \qquad q = 2e^{-\alpha t}(\mathbf{A}\cos\beta t - \mathbf{B}\,\mathrm{sen}\,\beta t) + \Gamma e^{-\gamma t},$$

$$
(5^{\text{IV}})\quad
\begin{aligned}
i_1 &= l_1 \left[2e^{-\alpha t} \left(\frac{\mathbf{A}(r_1-\alpha)+\mathbf{B}\beta}{(r_1-\alpha)^2+\beta^2} \cos\beta t + \frac{\mathbf{A}\beta-\mathbf{B}(r_1-\alpha)}{(r_1-\alpha)^2+\beta^2} \operatorname{sen}\beta t \right) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\Gamma}{r_1-\gamma} e^{-\gamma t} \right], \\
i_2 &= l_2 \left[2e^{-\alpha t} \left(\frac{\mathbf{A}(r_2-\alpha)+\mathbf{B}\beta}{(r_2-\alpha)^2+\beta^2} \cos\beta t + \frac{\mathbf{A}\beta-\mathbf{B}(r_2-\alpha)}{(r_2-\alpha)^2+\beta^2} \operatorname{sen}\beta t \right) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\Gamma}{r_2-\gamma} e^{-\gamma t} \right].
\end{aligned}
$$

La (3') fornisce un resultato di importanza capitale, poichè dimostra che nel caso da noi trattato la carica delle armature è data dalla somma di due termini, uno dei quali è alternativo, mentre l' altro conserva il suo segno per tutta la durata del processo. Una cosa simile accade per i_1 e i_2, come si deduce dalle (5^{IV}).

Queste ultime equazioni ci permettono ancora di ricavare una espressione nuova per le quantità q_1 e q_2, che passano lungo i fili durante la scarica. Adesso anzi vi sarà luogo a distinguere fra l' elettricità che scorre sotto forma di corrente alternativa e quella che costituisce la corrente continua; noi per evitare le confusioni daremo ai primi termini l' indice a e ai secondi l' indice c. Sicchè si avrà subito:

$$
q_1 = q_{1,a} + q_{1,c}\,,
$$

$$
q_2 = q_{2,a} + q_{2,c}\,;
$$

le espressioni poi di $q_{1,a}$. $q_{1,c}$. $q_{2,a}$ e $q_{2,c}$ si ricavano dalle (5^{IV}) moltiplicando per dt e integrando rispetto al tempo da zero all' infinito. Risulta in questo modo:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
q_{1,a} &= 2l_1 \left[\frac{\mathbf{A}(r_1-\alpha)+\mathbf{B}\beta}{(r_1-\alpha)^2+\beta^2} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\mathbf{A}\beta-\mathbf{B}(r_2-\alpha)}{(r_2-\alpha)^2+\beta^2} \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \right], \\
q_{1,c} &= l_1 \frac{\Gamma}{r_1-\gamma} \frac{1}{\gamma}, \\
q_{2,a} &= 2l_2 \left[\frac{\mathbf{A}(r_2-\alpha)+\mathbf{B}\beta}{(r_2-\alpha)^2+\beta^2} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{\mathbf{A}\beta-\mathbf{B}(r_2-\alpha)}{(r_2-\alpha)^2+\beta^2} \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \right], \\
q_{2,c} &= l_2 \frac{\Gamma}{r_2-\gamma} \frac{1}{\gamma};
\end{aligned}
$$

o anche, ponendo per brevità di scrittura:

$$a_1 = 2\,l_1 \frac{\mathbf{A}(r_1 - \alpha) + \mathbf{B}\beta}{(r_1 - \alpha)^2 + \beta^2} = -\,l_1 \frac{\Gamma}{r_1 - \gamma},$$

$$b_1 = 2\,l_1 \frac{\mathbf{A}\beta - \mathbf{B}(r_1 - \alpha)}{(r_1 - \alpha)^2 + \beta^2},$$

e introducendo le notazioni corrispondenti per il secondo filo:

$$(8') \qquad q_{1,a} = \frac{a_1\alpha + b_1\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad q_{1,c} = -\frac{a_1}{\gamma},$$

$$q_{2,a} = \frac{a_2\alpha + b_2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad q_{2,c} = -\frac{a_2}{\gamma}.$$

Con gli stessi simboli le (5^{IV}) diventano:

$$(5^{\text{V}}) \qquad i_1 = e^{-\alpha t}(a_1 \cos\beta t + b_1 \operatorname{sen}\beta t) - a_1 e^{-\gamma t},$$

$$i_2 = e^{-\alpha t}(a_2 \cos\beta t + b_2 \operatorname{sen}\beta t) - a_2 e^{-\gamma t}.$$

Elevando al quadrato queste equazioni, integrando i due membri moltiplicati per $d\,t$ da zero all' infinito, e premettendo all' integrale $\int_0^\infty i_1^2\,dt$ il fattore R_1 e all'altro il fattore R_2 si ottengono delle nuove espressioni delle quantità di calore svolte nei due fili e sono:

$$(9) \qquad Q_1 = R_1 \left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{4\alpha} + \frac{a_1^2}{2\gamma} + \frac{(a_1^2 - b_1^2)\alpha + 2\,a_1 b_1 \beta}{4(\alpha^2 + \beta^2)} - 2\,a_1 \frac{a_1(\alpha + \gamma) + b_1\beta}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2}\right],$$

$$Q_2 = R_2 \left[\frac{a_2^2 + b_2^2}{4\alpha} + \frac{a_2^2}{2\gamma} + \frac{(a_2^2 - b_2^2)\alpha + 2\,a_2 b_2 \beta}{4(\alpha^2 + \beta^2)} - 2\,a_2 \frac{a_2(\alpha + \gamma) + b_2\beta}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2}\right],$$

§ 20. *Intensità delle correnti derivate.* — Pur troppo le formole che si hanno per la risoluzione della equazione di terzo grado sono troppo complesse perchè si possa farne uso nella pratica. Bisognerà necessariamente cercare una radice

per tentativi; una volta trovata questa si abbassa il grado dell'equazione al secondo e si ricavano subito le altre due.

In certi casi speciali, che per fortuna hanno molta importanza nelle applicazioni, si sanno però stabilire delle formole approssimate per una radice reale.

Proviamo infatti a verificare se non possa farsi:

$$\gamma = r_2 (1 + \varepsilon),$$

dove ε si vuole che sia una quantità piccola rispetto ad uno, tanto piccola che la seconda potenza e le superiori risultino trascurabili. Verrà come condizione:

$$\varepsilon = - \frac{l_2 (r_2 - r_1)}{r_2^2 (r_2 - r_1) + r_2 (l_1 + l_2)}.$$

Se si suppone in primo luogo che r_2 sia grande rispetto a r_1, e r_2^2 grande rispetto a l_1 e l_2 potremo scrivere semplicemente:

$$\varepsilon = - \frac{l_2}{r_2^2}$$

ciò che costituisce un valore accettabile, in accordo con le premesse; viene dunque:

$$\gamma = r_2 \left(1 - \frac{l_2}{r_2^2}\right). \tag{10}$$

In secondo luogo ammettiamo che r_2 sia della forma:

$$r_2 = r_1 (1 + \alpha).$$

con α piccolissimo, e l_1 e l_2 siano grandi rispetto a r_2^2 viene allora:

$$\varepsilon = - \frac{l_2 \alpha}{l_1 + l_2},$$

$$\gamma = r_2 \left(1 - \frac{l_2 \alpha}{l_1 + l_2}\right).$$

In molti casi poi nè l'una nè l'altra formola potranno applicarsi rigorosamente; ma l'una o l'altra potrà dare un valore approssimato γ', che scriveremo sotto la forma:

$$\gamma' = \gamma - h;$$

allora indicando con $F(x)$ il primo membro della caratteristica risulterà:

$$0 = F(-\gamma) = F(-\gamma' - h) = F(-\gamma') - h F'(-\gamma')$$

e quindi:

$$h = \frac{F(-\gamma')}{F'(-\gamma')}.$$

La formola (10) ha un'importanza considerevole. Si supponga infatti che le condizioni nelle quali essa vale siano verificate e per di più si ammetta che l_1 e l_2 abbiano lo stesso ordine di grandezza.

Allora il termine continuo della corrente i_1 sarà, per le (5^{IV}):

$$i_{1,c} = l_1 \frac{\Gamma e^{-\gamma t}}{r_1 - r_2\left(1 - \frac{l_2}{r_2^2}\right)} = -l_1 \frac{\Gamma e^{-\gamma t}}{r_2\left(1 - \frac{l_2}{r_2^2}\right)},$$

e il termine continuo di i_2, per le stesse equazioni:

$$i_{2,c} = l_2 \frac{\Gamma e^{-\gamma t}}{r_2 - r_2\left(1 - \frac{l_2}{r_2^2}\right)} = l_2 \frac{\Gamma e^{-\gamma t}}{r_2 \frac{l_2}{r_2^2}};$$

dividendo membro a membro risulta:

$$\frac{i_{2,c}}{i_{1,c}} = -\frac{l_2}{l_1} \frac{1 - \frac{l_2}{r_2^2}}{\frac{l_2}{r_2^2}}.$$

Si ha dunque questo resultato interessante che, se dei due fili uno è molto meno resistente dell' altro la corrente continua passa di preferenza per quest' ultimo.

§ 21. *Casi particolari.* — Procediamo allo studio di alcuni casi particolari. Cominceremo per osservare che in ge-

nere non si può dire in che rapporto si divida la corrente fra i due fili; le equazioni (5^{IV}) mostrano propriamente che per i termini continui vi è un rapporto costante, ma per i termini alternativi non più: se i periodi sono gli stessi nei due conduttori le fasi sono differenti.

Possiamo domandarci però se non vi sia qualche valore delle costanti che semplifichi questa condizione di cose.

Riferiamoci alle formole ($5''$), le quali forniscono per il rapporto $\frac{i_1}{i_2}$ l' espressione:

$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{\frac{l_1+a^2m_1}{a+r_1}\mathrm{A}e^{at}+\frac{l_1+b^2m_1}{b+r_1}\mathrm{B}e^{bt}+\frac{l_1+c^2m_1}{c+r_1}\mathrm{C}e^{ct}}{\frac{l_2+a^2m_2}{a+r_2}\mathrm{A}e^{at}+\frac{l_2+b^2m_2}{b+r_2}\mathrm{B}e^{bt}+\frac{l_2+c^2m_2}{c+r_2}\mathrm{C}e^{ct}},$$

è evidente che basta fare:

$$r_1=r_2=r,$$

cioè:

$$\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{L}_1-\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_2-\mathrm{M}},$$

perchè $\frac{i_1}{i_2}$ diventi indipendente dal tempo.

Risulta allora:

$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{\mathrm{L}_2-\mathrm{M}}{\mathrm{L}_1-\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}.$$

Questo problema merita di essere esaminato un po' più da vicino; la caratteristica essendo:

$$(1+m_1+m_2)\,\mathrm{D}^3+r\,(2+m_1+m_2)\,\mathrm{D}^2+(l_1+l_2+r^2)\,\mathrm{D}+r\,(l_1+l_2)=0.$$

si può scrivere anche:

$$[(1+m_1+m_2)\,\mathrm{D}^2+r\,\mathrm{D}+l_1+l_2]\,(\mathrm{D}+r)=0,$$

ma la radice $x=-r$ è spuria, dal momento che si annulla

il coefficiente di e^{ct} nella espressione di q [1]; possiamo dunque sostituire alla coppia considerata un unico conduttore. Del resto rifacendo il calcolo da capo si trova appunto, come caratteristica:

$$(1 + m_1 + m_2) D^2 + r D + l_1 + l_2 = 0 .$$

Se ora vogliamo trascurare m_1 e m_2 [2]) viene come condizione semplicemente:

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2} ,$$

e per conseguenza:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2}{R_1} .$$

La caratteristica alla sua volta prende la forma:

$$(D^2 + r D + l_1 + l_2)(D + r) = 0 ,$$

e di nuovo la radice $-r$ è spuria. Il coefficiente relativo si annulla per virtù delle (6).

Delle formole semplici si ottengono anche quando le resistenze siano trascurabili davanti ai coefficienti di autoinduzione. Allora si può scrivere:

$$r_1 = r_2 = 0 ,$$

1) Questo coefficiente avendo la forma:

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & q_0 \\ \frac{l_1 + a_2 m_1}{a + r_1} & \frac{l_1 + b^2 m_1}{b + r_1} & 0 \\ \frac{l_2 + a^2 m_2}{a + r_2} & \frac{l_2 + b^2 m_2}{b + r_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{l_1 + a^2 m_1}{a + r_1} & \frac{l_1 + b^2 m_1}{b + r_1} & \frac{l_1 + c^2 m_1}{c + r_1} \\ \frac{l_2 + a^2 m_2}{a + r_2} & \frac{l_2 + b^2 m_2}{b + r_2} & \frac{l_2 + c^2 m_2}{c + r_2} \end{vmatrix}} ,$$

va a zero per:

$$r_1 = r_2 = - c .$$

2) Si confronti il § 13.

e la caratteristica (4‴) diventa:

$$(1 + m_1 + m_2) D^3 + (l_1 + l_2) D = 0 ,$$

le radici sono dunque:

$$a = \beta i ,$$
$$b = - \beta i ,$$
$$c = 0 ,$$

con:

$$\beta = \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{1 + m_1 + m_2}} .$$

Di nuovo la C si annulla.

Ciò posto dalle (5‴) risulta:

$$i_1 = \frac{l_1 - \beta^2 m_1}{\beta i} (A e^{\beta i t} - B e^{-\beta i t}) ,$$

$$i_2 = \frac{l_2 - \beta^2 m_2}{\beta i} (A e^{\beta i t} - B e^{-\beta i t}) ,$$

e poichè è:

$$A = B = \frac{q_0}{2} ,$$

viene anche subito:

$$i_1 = q_0 \frac{l_1 - \beta^2 m_1}{\beta} \operatorname{sen} \beta t ,$$

$$i_2 = q_0 \frac{l_2 - \beta^2 m_2}{\beta} \operatorname{sen} \beta t ,$$

e ponendo per β^2 il suo valore:

$$i_1 = q_0 \frac{l_1 (1 + m_2) - m_1 l_2}{\beta (1 + m_1 + m_2)} \operatorname{sen} \beta t ,$$

$$i_2 = q_0 \frac{l_2 (1 + m_1) - m_2 l_1}{\beta (1 + m_1 + m_2)} \operatorname{sen} \beta t ,$$

Esprimiamo adesso $l_1 . l_2 . m_1$ e m_2 come al § 14, e ricaveremo senz' altro:

$$i_1 = q_0 \frac{-(L_2 - M)B}{\beta (L_1 - M)(L_2 - M)(1 + m_1 + m_2)} \operatorname{sen} \beta t,$$

$$i_2 = q_0 \frac{-(L_1 - M)B}{\beta (L_1 - M)(L_2 - M)(1 + m_1 + m_2)} \operatorname{sen} \beta t;$$

risulta dunque:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{L_2 - M}{L_1 - M}.$$

Il periodo è:

$$\frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{1 + m_1 + m_2}{l_1 + l_2}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{-(L_1 L_2 - M^2)B}{L_1 - 2M + L_2}}.$$

Dei resultati analoghi si otterrebbero supponendo β estremamente grande nelle (6') e (5^IV).

Finalmente vogliamo considerare il caso in cui uno dei coefficienti di autoinduzione, per esempio L_2, è trascurabile, rispetto alla resistenza del suo filo.

Ponendo nella (4') $L_2 = M = 0$, e introducendo di più la notazione:

$$\lambda_2 = -\frac{B}{R_2},$$

risulterà:

$$D^2 + (\lambda_2 + r_1) D + r_1 \lambda_2 + l_1 = 0;$$

anche qui dunque la caratteristica è del secondo grado.

Che se poi anche $\frac{L_1}{R_1}$ fosse nullo, cioè i due conduttori avessero un grande diametro e una piccola conducibilità, verrebbe senz' altro come caratteristica:

$$D + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

e poi:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

La scarica sarebbe dunque continua e si deriverebbe secondo il rapporto inverso delle resistenze.

§ 22. *Ricerche dell'Autore su le scariche derivate.* — Passiamo adesso a discutere, in alcuni casi pratici, i resultati della teoria.

Come primo esempio scelgo di calcolare una disposizione, con la quale ho studiato, anni or sono, allo specchio girante, secondo il metodo di Feddersen, le scariche di un condensatore lungo due fili in parallelo [1]).

L'apparecchio era disposto nel modo che si ricava dalla figu ra 2.

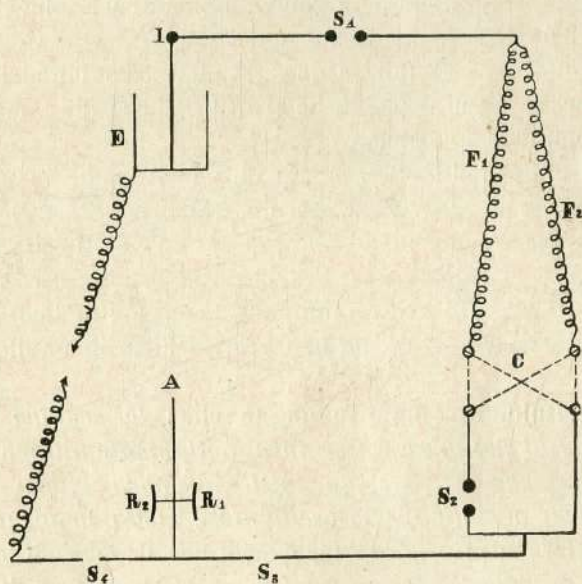



Fig. 2.

L'armatura interna I di un condensatore era messa in comunicazione con una delle aste di uno spinterometro S_1,

1) Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, XXXII, 1898.

alla seconda asta del quale erano saldati i fili F_1 e F_2, che costituivano i due rami del circuito di scarica.

Questi fili mettevano capo all' altro estremo nella prima coppia di pozzetti di un commutatore a mercurio C. E dalla seconda coppia partivano due condutture di grosso filo di rame, le quali, dopo breve tratto, andavano a congiungersi insieme. In una di tali condutture era praticato un intervallo di scarica S_2.

I fili procedevano uniti fino a presentarsi in S_3 davanti ad una delle posizioni possibili di un' asta $S_3 S_4$, fissata rigidamente a quel medesimo asse A, intorno al quale giravano gli specchi sferici R_1 ed R_2.

Quando, durante la rotazione, l' asta $S_3 S_4$ si trovava con un capo a breve distanza dall' estremo dei fili, l' altro capo si affacciava ad un conduttore comunicante in T con la terra.

Era messa parimenti in comunicazione col suolo l' armatura esterna E del condensatore.

Questo era costituito da due grandi boccie cilindriche di vetro verde, la cui capacità ho trovato adesso di 4 millesimi di microfarad per ciascuna.

Dei due conduttori F_1 ed F_2, che formavano i rami del circuito di scarica, il primo era un tratto rettilineo [1]) di filo di argentana, lungo un metro e spesso due millimetri; il secondo, pure rettilineo, aveva la medesima lunghezza, ma un diametro di 25 millesimi di millimetro appena: in alcune esperienze si trattava di un filo di ferro, in altre di un filo di costantana.

« Il risultato costante fu questo che: *la scarica corrispondente al filo grosso è sempre nettamente alternativa; la scarica, che segue il filo sottile, sembra talora essere aperiodica, ma più spesso oscillante e molto smorzata* ».

Noi faremo il calcolo supponendo che il secondo conduttore sia un filo di ferro; prendiamo per fissare le idee le resistenze specifiche:

$$\rho_1 = 30 . 10^3 ,$$
$$\rho_2 = 9{,}6 . 10^3 .$$

1) La figura per errore rappresenta i fili F_1 e F_2 avvolti a spirale.

Con questi dati e con gli altri che ho riferito risulta:

$$r_1 = 6,545 \,.\, 10^4 , \qquad l_1 = 8,569 \,.\, 10^{13} ,$$
$$r_2 = 8,561 \,.\, 10^7 , \qquad l_2 = 5,691 \,.\, 10^{13} ;$$

formando la caratteristica (4‴) e risolvendola viene:

$$\alpha = 3,6400 \,.\, 10^5 ,$$
$$\beta = 9,2881 \,.\, 10^6 ,$$
$$\gamma = 8,4952 \,.\, 10^7 .$$

Bisogna adesso portare i valori di α, β e γ nelle (6′) e ricavarne **A**, **B** e Γ; si trova:

$$\frac{\mathbf{A}}{q_0} = 0,50388 ,$$
$$\frac{\mathbf{B}}{q_0} = 0,01577 ,$$
$$\frac{\Gamma}{q_0} = -\, 0,00777 .$$

Finalmente si calcolano i coefficienti di $l_1\, e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$, $l_1\, e^{-\alpha t} \cos \beta t$, $l_1\, e^{-\gamma t}$, $l_2\, e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$, $l_2\, e^{-\alpha t} \cos \beta t$, $l_2\, e^{-\gamma t}$ nelle espressioni (5^{IV}) di i_1 e i_2; viene:

$$i_1 = q_0 l_1 [e^{-\alpha t}(-9,14 . 10^{-11} \cos \beta t + 1,08 . 10^{-7} \operatorname{sen} \beta t) + 9,14 . 10^{-11} e^{-\gamma t}]$$

$$i_2 = q_0 l_2 [e^{-\alpha t}(\ 1,17 . 10^{-8} \cos \beta t + 0,09 . 10^{-8} \operatorname{sen} \beta t) - 1,17 . 10^{-8} e^{-\gamma t}],$$

e quindi:

$$a_1 = -\, 7,83 \,.\, 10^3 \,.\, q_0 , \qquad a_2 = 6,66 \,.\, 10^5 \,.\, q_0 ,$$
$$b_1 = \ \ 9,25 \,.\, 10^6 \,.\, q_0 , \qquad b_2 = 5,12 \,.\, 10^4 \,.\, q_0 ,$$

e, per le (8′):

$$q_{1,a} = 0,99936 \,.\, q_0 , \qquad q_{1,c} = \ \ 0,00009 \,.\, q_0 ,$$
$$q_{2,a} = 0,00836 \,.\, q_0 , \qquad q_{2,c} = -\, 0,00784 \,.\, q_0 ;$$

come verifica si trova:

$$q_1 + q_2 = q_{1,a} + q_{1,c} + q_{2,a} + q_{2,c} = 0,99997 \,.\, q_0 .$$

I valori delle $q_{1,a}$ ... bastano da soli a mostrare che il resultato sperimentale riceve il suffragio della teoria. Per il filo grosso viene infatti :

$$\frac{q_{1,a}}{q_{1,c}} = 10000 \text{ circa ;}$$

la scarica dovette dunque apparire nettamente alternativa; per il filo di ferro invece risulta :

$$\frac{q_{2,a}}{q_{2,c}} = -1, \text{ o quasi,}$$

e però in questo caso i caratteri delle due scariche dovevano essere sovrapposti, come ho riconosciuto.

Alle stesse conclusioni si viene considerando i coefficienti dei diversi termini nelle espressioni di i_1 e i_2. Nella prima il termine del seno ha la massima importanza, sicchè la forma della corrente i_1 sarà quella di una semplice sinusoide smorzata. Nella seconda le cose vanno diversamente ; il termine del seno è piccolo rispetto a quello che contiene il coseno, e produce appena un leggero spostamento di fase, ma l' esponenziale esercita nei primi istanti un' influenza considerevole; scompare bensì assai presto perchè γ è grande rispetto a α e β. Come resultato ad ogni modo si ottiene che la prima mezza oscillazione, che è la più ampia e quella che dà il carattere all' imagine formata dallo specchio rotante, ha per i_1 la durata $\frac{\pi}{\beta}$, per i_2 la durata $\frac{\pi}{2\beta}$ o poco più. Ora, a parità di condizioni, l' imagine breve caratterizza appunto la scarica continua o fortemente smorzata.

§ 23. *Ricerche del Prof. Cardani.* — Un controllo anche migliore si può dare alla nostra teoria confrontandola con i risultati sperimentali del Cardani.

Il Cardani, in una lunga serie di memorie [1]), ha studiato la distribuzione delle correnti di scarica dei condensatori nei circuiti derivati, misurando le quantità di calore che si svolgevano in due fili in parallelo.

1) N. Cim. (4), II, 1895, (4), III, 1896 e (4), IV, 1896.

La misura era fatta per mezzo di termometri a petrolio, e uno dei due conduttori rimase sempre invariato. Era un filo di platino di 0,03 cm. di diametro e 200 cm. di lunghezza. Questo conduttore sarà distinto sempre nel seguito con l'indice 1; le sue costanti sono:

$$R_1 = 2,546 \,.\, 10^9 ,$$

$$L_1 = 3676 ,$$

e quindi:

$$r_1 = \frac{R_1}{L_1} = 6,93 \,.\, 10^5 .$$

Il secondo conduttore aveva nella maggior parte delle esperienze la lunghezza di 50 cm.; variavano da caso a caso il suo diametro e la sostanza.

La prolissità dei calcoli necessarii per trovare teoricamente la distribuzione dell'energia in una coppia particolare, non mi permette di discutere molti esempii. Io mi accontenterò di scegliere a caso una sola esperienza fra le centinaia, i cui resultati furono registrati dal Cardani. Prenderò come secondo conduttore un filo di rame della lunghezza di 50 cm. e del diametro di cm. 0,012. Posta la resistenza specifica uguale a $1,3 \,.\, 10^3$ [1]), risulta:

$$R_2 = 5,744 \,.\, 10^8 ,$$

$$L_2 = 872 ,$$

$$r_2 = 6,59 \;\; 10^5 .$$

Per stabilire la forma dell'equazione caratteristica bisogna conoscere ancora la capacità del condensatore. Questo era costituito da 40 bottiglie in quantità di 3 millesimi di microfarad ciascuna. Viene dunque:

$$C = 12 \,.\, 10^{-17} ,$$

1) Questo dato numerico e gli altri che riporto in seguito (quando non siano contenuti nelle memorie originali del Cardani) mi furono favoriti gentilmente dall'Autore. Sono lieto di poterlo ringraziare pubblicamente della sua cortesia.

4

e per conseguenza:

$$l_1 = 2,26 \,.\, 10^{13},$$
$$l_2 = 9,58 \,.\, 10^{12}.$$

Scrivendo l' equazione in D e risolvendola si trova:

$$\alpha = 3,35 \,.\, 10^5,$$
$$\beta = 3,44 \,.\, 10^6,$$
$$\gamma = 6,85 \,.\, 10^5.$$

e dopo qualche calcolo:

$$a_1 = 3,84 \,.\, 10^4 \,.\, q_0, \qquad a_2 = -9,58 \,.\, 10^3 \,.\, q_0,$$
$$b_1 = 6,60 \,.\, 10^5 \,.\, q_0, \qquad b_2 = 2,80 \,.\, 16^6 \,.\, q_0,$$

e finalmente:

$$Q_1 = 8,30 \,.\, 10^{14} \,.\, q_0^2,$$
$$Q_2 = 33,58 \,.\, 10^{14} \,.\, q_0^2.$$

La somma delle quantità Q_1 e Q_2 fornisce:

$$Q_1 + Q_2 = 4,19 \,.\, 10^{15} .\, q_0^2,$$

mentre si ha come verifica:

$$\frac{1}{2C} = 4,17 \,.\, 10^{15}.$$

Il rapporto dei due numeri Q_2 e Q_1,

$$\frac{33,58}{8,30},$$

si può scrivere anche:

$$\frac{200}{49,4};$$

il Cardani trova:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{200}{53,8} \text{ [1]};$$

1) N. Cim. (4), II, 286, 1895.

l'accordo si può dunque ritenere ottimo se si tiene conto da un lato della semplicità delle ipotesi messe a base della teoria, e dall'altro delle molteplici cause di errore, che intervengono sempre nelle esperienze calorimetriche.

Poichè la verifica trovata non può essere casuale credo inutile calcolare ancora nuove coppie; piuttosto cercheremo di confrontare in altro modo l'esperienza e la teoria.

I valori trovati per le costanti a e b nel paragrafo 22 e in questo stesso mostrano un comportamento caratteristico, che si potrebbe illustrare con molti altri esempii. Sempre quando le grandezze r_1 e r_2 sono diverse, accade che nel filo al quale spetta la più piccola r il coseno ha un coefficiente negativo, l'esponenziale lo ha positivo, il seno positivo è preponderante; nell'altro conduttore il coseno ha un coefficiente positivo e l'esponenziale negativo, quanto al seno il suo coefficiente è sempre maggiore di zero, ma diminuisce in grandezza al crescere della r corrispondente.

Nell'istante però in cui $r_1 = r_2$ (si confronti il § 21) il coseno e l'esponenziale svaniscono dalle espressioni delle correnti, e i numeri che moltiplicano il seno stanno nel rapporto inverso dei coefficienti di autoinduzione (o delle resistenze).

Premesso questo supponiamo che il filo 1 rimanga fisso e il filo 2 conservi la sua lunghezza (f_2) e la sostanza, ma cambi man mano e, propriamente, diminuisca il diametro (d_2). Da principio, essendo d_2 molto grande, sarà $r_2 < r_1$ e però nel secondo filo la corrente sarà all'ingrosso alternativa. Se ora d_2 diminuisce arriverà un istante in cui le r si uguagliano, istante che è determinato dall'equazione:

$$(\S) \qquad r_1 = \frac{2\rho_2}{\pi d_2^2 \log\left(\frac{4f_2}{d_2} - 1\right)},$$

nella quale f_2 deve considerarsi come costante.

A partire da questo punto se d_2 continua a diminuire verrà:

$$r_2 > r_1,$$

nei due fili si svolgeranno di nuovo il coseno e l'esponenziale; e nel secondo conduttore quest'ultimo termine andrà acquistando un'importanza sempre più considerevole.

Calcoliamo per alcuni metalli il valore d_2 che soddisfa alla (§).

Prenderemo per r_1 il valore già dato, $6{,}93 . 10^5$, per f_2 50 cm. e per le resistenze specifiche ρ_2 i numeri seguenti:

	$\rho_2 . 10^{-3}$
Ferro . . .	9,0
Ottone . . .	6,7
Rame . . .	1,3.

Verrà senz' altro:

Ferro . .	d_2 in cm.	0,030	0,031	0,032	0,033	0,034	0,035
	$r'_2 . 10^{-5}$	8,16	7,68	7,23	6,83	6,45	6,11
Ottone .	d_2 in cm.	0,025	0,026	0,027	0,028	0,029	0,030
	$r'_2 . 10^{-5}$	8,54	7,92	7,38	6,91	6,47	6,07
Rame . .	d_2 in cm.	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015
	$r'_2 . 10^{-5}$	9,30	7,77	6,59	5,67	4,93	4,32.

Si deduce dalle tabelle che l' istante in cui le grandezze di r_2 e r_1 si uguagliano è caratterizzato per i diversi metalli, e nelle condizioni prescelte, dai valori seguenti:

	Ferro	Ottone	Rame
d_2 in cm.	0,033	0,028	0,012

Come ho detto già, diminuendo i d_2 a partire da questi diametri, la corrente del secondo filo acquista sempre più spiccato il carattere della continuità; inoltre q_2 e Q_2 diventano rapidamente piccolissime [1]).

Tutti i resultati ottenuti or ora si ritrovano sotto altra forma nel Cardani.

Egli deduce infatti dalle sue esperienze che la resistenza dei fili sottili cresce rapidissimamente a partire da un certo diametro che chiama *critico*.

E aggiunge [2]): « il diametro critico, a parità di condizioni sperimentali, varia da metallo a metallo: così per esempio il

1) Si confronti l' esempio numerico del § 22, per avere un' idea del modo in cui si divide la q in due fili di diversa r.

2) N. Cim. (4), II, 289, 1895.

rame ha per diametro critico cm. 0,012, l' ottone cm. 0,022 circa, il ferro circa cm. 0,030, lo stesso sensibilmente il platino, ecc. ».

Quando i fili sono estremamente sottili, scrive ancora il Cardani più avanti [1]), « la loro resistenza si comporta come quella che essi presentano alle ordinarie correnti, e cioè varia da metallo a metallo e cresce rapidamente col diminuire del diametro ».

La teoria assegna di questo fatto una ragione assai semplice; al di sotto del diametro critico la corrente è in realtà, per buona parte, continua.

Nella condizione:

$$r_1 = r_2$$

la capacità del condensatore non entra; è parso invece al Cardani che in certi casi si modifichi insieme con questa grandezza anche il diametro critico. Lo stesso Autore però osserva in proposito [2]):

« Questa dipendenza della resistenza dalla quantità di elettricità è proprio una dipendenza reale, ovvero non è piuttosto una conseguenza del fatto che i fili sono portati colla maggior quantità di elettricità che li attraversa a temperature molto più elevate? È questa una quistione che dalle attuali ricerche non può, almeno mi sembra, avere una facile soluzione: ma il fatto stesso che l' influenza della quantità di elettricità è molto minore nell' argento e nel rame che meglio conducono le scariche e meno si riscaldano, anzichè nel ferro e nel platino, tende a provare che la temperatura deve avere nel fenomeno una parte preponderante ».

Se le cose vanno realmente in questo modo, non c' è da meravigliare che le nostre formole non prevedano il fatto di cui si tratta; in realtà entrerebbero in giuoco delle azioni, delle quali la teoria non ha tenuto conto.

Possiamo invece verificare agevolmente un altro resultato, secondo il quale la *resistenza* opposta dai fili alle scariche

1) Loc. cit. 295.
2) Loc. cit. 290.

non dipende solo dalla coppia che si studia, bensì ancora dalla capacità del condensatore.

Trova il Cardani [1]) che per i fili grossi « le resistenze si presentano di valore tanto più piccolo, quanto maggiore è la capacità del condensatore che si adopera ».

Per i fili estremamente sottili invece [2]) « la resistenza cresce rapidissimamente col crescere della capacità ».

Se si bada all' interpretazione teorica del diametro critico, si vede subito che questi resultati si possono raccogliere in un enunciato solo dicendo che: se in una coppia data r_2 è maggiore di r_1, il rapporto $\frac{Q_2}{Q_1}$ dovrà diminuire quando si fa crescere la capacità del condensatore. Per verificare questo si calcolino anzitutto Q_1 e Q_2 per il sistema studiato nel § 22. Verrà:

$$Q_2 = 5{,}70 \,.\, 10^{16} \,.\, q_0^2 \,,$$

$$Q_1 = 0{,}56 \,.\, 10^{16} \,.\, q_0^2 \,;$$

come verifica si trova:

$$Q_1 + Q_2 = 6{,}26 \,.\, 10^{16} \,.\, q_0^2 \,,$$

mentre è:

$$\frac{1}{2C} = 6{,}25 \,.\, 10^{16} \,;$$

per il rapporto poi viene senz' altro:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 10{,}18 \,.$$

Ciò posto si ricalcoli lo stesso esempio lasciando inalterata la coppia e moltiplicando per 10 la capacità del condensatore. Si avrà di conseguenza:

$$r'_1 = 6{,}545 \,.\, 10^4 \,, \qquad l'_1 = 8{,}569 \,.\, 10^{11} \,,$$

$$r'_2 = 8{,}567 \,.\, 10^7 \,, \qquad l'_2 = 5{,}691 \,.\, 10^{12} \,:$$

e da ultimo:

$$Q'_2 = 3{,}12 \,.\, 10^{15} \,.\, q_0^2 \,,$$

$$Q'_1 = 3{,}11 \,.\, 10^{15} \,.\, q_0^2 \,;$$

1) N. Cim. (4), II, 229, 1895.
2) Loc. cit. 232.

come verifica si trova:

$$Q'_1 + Q'_2 = 6{,}23 \,.\, 10^{15} \,.\, q_0^2 \,,$$

mentre è:

$$\frac{1}{2C} = 6{,}25 \,.\, 10^{15} \,.$$

Per il rapporto risulta:

$$\frac{Q'_2}{Q'_1} = 1{,}00 \,.$$

in accordo perfetto con ciò che si prevedeva.

Osserverò finalmente che se il secondo conduttore è un elettrolito, dovendosi fare il diametro molto grande, sarà piccolo L_2 in confronto di R_2, e però r_2 risulterà sempre molto notevole. Nelle condizioni sperimentali ordinarie sarà anzi $r_2 > r_1$; il che spiega, ancora una volta, i resultati ottenuti dal Cardani con le soluzioni di acido solforico e di solfato di rame [1]).

§ 24. *Note bibliografiche al Capitolo terzo.* — Fra i casi particolari del paragrafo ventesimoprimo fu trattato da me [2]), in una nota vecchia già di parecchi anni, quello definito dalle uguaglianze:

$$r_1 = r_2 = 0 \,.$$

Il sig. Mizuno [3]) studiò a sua volta il problema precedente:

$$r_1 = r_2 = r \,,$$
$$m_1 = m_2 = 0 \,.$$

La soluzione del caso generale [4]) e tutto il resto del capitolo [5]) mi appartengono.

1) N. Cim., (4), IV, 200, 1896. Anche nel caso più favorevole, in quello cioè delle soluzioni sature di solfato di rame è $\rho = 29{,}3.10^9$; sicchè prendendo, come fa il Cardani, un tubo di 12 cm. di lunghezza e 1,6 cm di diametro risulta $r = 3{,}03.10^9$: ora il filo di confronto continuava ad essere quello di platino usato nelle altre esperienze, per il quale è $r = 6{,}93.10^5$.

2) A. Garbasso. N. Cim., (4), VI, 1897.

3) I. Mizuno. Electrician, XLVII, 1901.

4) A. Garbasso. Drud. Ann., VIII, 1902.

5) A. Garbasso. Mem. R. Acc. di Torino, (2), LII, 1902.

CAPITOLO QUARTO.

Scariche in un sistema di conduttori complessi.

§ 25. *Posizione del problema e sua soluzione generale.* — Imagineremo che il sistema comprenda un numero qualunque a di conduttori, uguali o no, poco importa.

Chiameremo α, β gli indici correnti dei conduttori; π, ρ, σ, τ gli indici correnti delle capacità; μ, ν gli indici correnti dei fili.

Ogni conduttore si distinguerà con un indice solo (come α). Ogni capacità con due indici (come α, π), il primo relativo al conduttore e il secondo alla capacità stessa; e ogni coppia di capacità con quattro indici (come α, π, β, σ). Ogni filo si distinguerà pure con quattro indici (come α, π, ρ, μ), il primo relativo al conduttore, il secondo e il terzo alle capacità che il filo congiunge, il quarto al filo stesso; finalmente ogni coppia di fili si distinguerà con otto indici (come α, π, ρ, μ, β, σ, τ, ν), i primi quattro relativi al primo filo e gli ultimi al secondo.

Per le cariche, i coefficienti di potenziale, le capacità, le resistenze, i coefficienti di autoinduzione, le correnti e i coefficienti di induzione mutua manteniamo gli stessi simboli di prima.

Si osserverà espressamente che $i_{\alpha,\pi,\rho,\mu}$ è la corrente che, nel conduttore α-esimo, va dalla π-esima alla ρ-esima capacità, seguendo il μ-esimo filo.

Si avrà:

$$i_{\alpha,\pi,\pi,\mu} = 0\,,$$

(1)

$$i_{\alpha,\pi,\rho,\mu} = -\,i_{\alpha,\rho,\pi,\mu}.$$

Le equazioni del problema sono divise in due serie; la prima serie è relativa ad ogni capacità e si scrive:

$$(2) \qquad D\, q_{\alpha,\pi} + \Sigma^{\rho}\, \Sigma^{\mu}\, i_{\alpha,\pi,\rho,\mu} = 0\,,$$

la seconda è relativa ad ogni filo e si scrive:

$$(3) \qquad \Sigma^{\beta}\, \Sigma^{\tau}\, K_{\alpha,\rho,\beta,\tau} q_{\beta,\tau} - \Sigma^{\beta}\, \Sigma^{\sigma}\, K_{\alpha,\pi,\beta,\sigma}\, q_{\beta,\sigma} +$$

$$+ \Sigma^{\beta}\, \Sigma^{\sigma}\, \Sigma^{\tau}\, \Sigma^{\nu}\, N_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} i_{\beta,\sigma,\tau,\nu} = 0\,,$$

intendendo che sia:

$$N_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\alpha,\pi,\rho,\mu} = R_{\alpha,\pi,\rho,\mu} + D\, L_{\alpha,\pi,\rho,\mu}\,,$$

$$N_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} = D\, M_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu}\,.$$

Il numero complessivo di queste equazioni si ottiene sommando il numero totale delle capacità col numero totale dei fili; esse sono dunque tante come le incognite q ed i. Il resultato dell' eliminazione si esprime di nuovo applicando a ciascuna q ed a ciascuna i il determinante dei coefficienti. Ora, poichè ogni suo elemento è al massimo di primo grado in D, il determinante sarà una funzione di D di grado non superiore a

$$\sum_{1}^{a}{}^{\alpha}\, (p_{\alpha} + m_{\alpha})\,.$$

In realtà però, svolgendo, si troverebbe che il grado è minore, e la cosa può anche riconoscersi a priori. Si avrà infatti per le (1) e (2):

$$D\, \Sigma^{\pi}\, q_{\alpha,\pi} = - \Sigma^{\pi}\, \Sigma^{\rho}\, \Sigma^{\mu}\, i_{\alpha,\pi,\rho,\mu} = 0\,,$$

per ogni valore di α, le quali equazioni significano che la carica complessiva su ogni conduttore rimane inalterata.

È quindi possibile fare in modo, con semplici addizioni di linee, che il D risulti fattore in a orizzontali del determinante; allora il grado (Γ) di quest' ultimo diventa:

$$\Gamma = \sum_{1}^{a}{}^{\alpha}\, (p_{\alpha} + m_{\alpha}) - a.$$

Se dunque si studia un sistema di conduttori comunque complessi ogni sua carica ed ogni sua corrente è determinata da un' equazione differenziale lineare ed omogenea (la stessa per tutte le variabili), il cui ordine si ottiene aggiungendo il numero delle capacità a quello dei fili, e sottraendo dalla somma il numero dei conduttori, che costituiscono il sistema.

La caratteristica di tale equazione (che per brevità chiameremo nel seguito *caratteristica del sistema*) si scrive ponendo senz' altro a zero il determinante e considerando in esso il D come un' incognita e non più come un simbolo operatorio; avrà in generale il grado $\sum_1^a{}^{\alpha} (p_\alpha + m_\alpha) - a$.

Per i singoli conduttori costituenti il sistema il grado della caratteristica è:

$$\gamma_\alpha = p_\alpha + m_\alpha - 1,$$

viene dunque:

$$\Gamma = \sum_1^a{}^{\alpha} \gamma_\alpha .$$

Si arriva così ad un teorema, che è fondamentale per la nostra teoria, e cioè: *il grado della caratteristica di un sistema di conduttori è la somma dei gradi delle caratteristiche relative ai conduttori, che lo costituiscono.*

La cosa è vera in particolare se ogni γ^α è pari, e quindi *un sistema emette uno spettro, che contiene in generale un numero di righe uguale alla somma di quelle, che compongono gli spettri dei suoi conduttori.*

In pratica il procedimento di calcolo che abbiamo seguito non suole essere conveniente. È più comodo eliminare le cariche dalle (3) per mezzo delle (2); si ottiene così un sistema di $\sum_1^a{}^{\alpha} m_\alpha$ equazioni fra le $\sum_1^a{}^{\alpha} m_\alpha$ correnti, e l' ordine del determinante si riduce anche a $\sum_1^a{}^{\alpha} m_\alpha$. Naturalmente con questo non muta la natura nè il grado della caratteristica.

Converrà anche distinguere i diversi fili con un solo numero progressivo, e mettere le (3) sotto la nuova forma:

$$(4) \qquad \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, P_{\mu,\nu}\, i_\nu = 0\,, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n, \qquad n = \sum_{1}^{a}{}^{\alpha}\, m_\alpha\,,$$

la caratteristica si riduce allora all'aspetto semplice:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \ldots & P_{n,n} \end{vmatrix} = 0\,.$$

§ 26. *Schermo di risonatori.* — Per dare un primo esempio del modo, in cui si utilizza nei casi pratici la teoria esposta nel paragrafo precedente, ne farò l'applicazione ad un sistema, del quale mi sono occupato in una nota, che fu accolta a suo tempo negli Atti dell'Accademia di Torino (XXVIII, 1893).

Sopra una tavoletta di legno avevo disposto in sei righe orizzontali 186 risonatori rettilinei, senza intervallo, tutti uguali, costituiti da un filo di rame terminato da due dischi di latta; sperimentando con questo schermo trovai che esso rifletteva assai bene i raggi di forza elettrica, ma la riflessione si poteva constatare anche per mezzo di secondarii dotati di periodo assai diverso da quello, che era proprio degli elementi del sistema.

Dedussi da questo resultato che « quando più risonatori sono messi molto vicini gli uni agli altri le cose succedono *come se* la loro radiazione fosse multipla ».

L'accordo fra l'esperienza e la teoria è manifesto; il teorema, che abbiamo dimostrato, porta infatti a concludere, senza nemmeno far calcoli, che nel caso attuale, avendosi nel sistema a risonatori con una oscillazione, ogni corrente deve risultare dalla somma di a oscillazioni, le quali, in generale, saranno tutte differenti fra loro, e differenti pure dall'oscillazione propria di ciascun elemento dello schermo, quando lo si consideri isolato.

Gli svolgimenti analitici si fanno del resto con tutta facilità, almeno se si trascurano le influenze mutue elettrostatiche.

Le equazioni (1) e (2) prendono infatti la forma:

$$\begin{cases} D\, q_{\alpha,1} + i_\alpha = 0\,, \\ D\, q_{\alpha,2} - i_\alpha = 0\,, \end{cases}$$

$$\frac{1}{C_{\alpha,1}} q_{\alpha,1} - \frac{1}{C_{\alpha,2}} q_{\alpha,2} - \sum_1^a {}_\beta\, N_{\alpha,\beta}\, i_\beta = 0\,, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, a$$

e però eliminando le q dal sistema (3) e introducendo ancora le notazioni:

$$D\, N_{\alpha,\beta} = P_{\alpha,\beta}\,, \qquad \alpha \text{ diverso da } \beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, a$$

$$D\, N_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{C_{\alpha,1}} + \frac{1}{C_{\alpha,2}} = P_{\alpha,\alpha}\,, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, a$$

si ottiene:

$$\sum_1^a {}_\beta\, P_{\alpha,\beta}\, i_\beta = 0\,.$$

Ogni i_α è dunque un' integrale dell' equazione:

$$\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,a} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{a,1} & P_{a,2} & \ldots & P_{a,a} \end{vmatrix} i_\alpha = 0\,,$$

che sarà lineare omogenea e dell' ordine $2a$, come avevamo previsto.

Se i risonatori dello schermo sono tutti uguali si possono ottenere assai elegantemente i periodi nel modo che segue.

Avremo anzitutto:

$$P_{\alpha,\beta} = D^2\, M_{\alpha,\beta}$$

e, trascurando le resistenze:

$$P_{\alpha,\alpha} = D^2\, L + \frac{2}{C}\,;$$

la caratteristica diventa dunque:

$$\begin{vmatrix} D^2 L + \frac{2}{C} & D^2 M_{1,2} & \ldots & D^2 M_{1,a} \\ D^2 M_{2,1} & D^2 L + \frac{2}{C} & \ldots & D^2 M_{2,a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^2 M_{a,1} & D^2 M_{a,2} & \ldots & D^2 L + \frac{2}{C} \end{vmatrix} = 0\,,$$

vale a dire:

$$\begin{vmatrix} L + \frac{2}{CD^2} & M_{1,2} & \dots & M_{1,a} \\ M_{2,1} & L + \frac{2}{CD^2} & \dots & M_{2,a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{a,1} & M_{a,2} & \dots & L + \frac{2}{CD^2} \end{vmatrix} = 0,$$

o ancora:

$$\begin{vmatrix} L + \frac{2x}{C} & M_{1,2} & \dots & M_{1,a} \\ M_{2,1} & L + \frac{2x}{C} & \dots & M_{2,a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{a,1} & M_{a,2} & \dots & L + \frac{2x}{C} \end{vmatrix} = 0,$$

con:

$$x = \frac{1}{D^2}.$$

Se indichiamo con:

$$x_\alpha$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots a)$$

le radici dell' ultima equazione, i periodi dello spettro emesso dallo schermo si determineranno con la formola:

$$T_\alpha = 2\pi \sqrt{-x_\alpha}.$$

Poniamo adesso:

$$x = -\left(\frac{LC}{2} + y\right)$$

e la caratteristica prenderà la forma semplice:

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} -\frac{2y}{C} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,a} \\ M_{2,1} & -\frac{2y}{C} & \cdots & M_{2,a} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{a,1} & M_{a,2} & \cdots & -\frac{2y}{C} \end{vmatrix} = 0,$$

e però i periodi si possono calcolare anche con la:

$$T_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_\alpha},$$

essendo le y_α radici della (*).

Annullandosi le $M_{\alpha,\beta}$ si annullano naturalmente tutte le y_α; e se le $M_{\alpha,\beta}$ sono piccole davanti alla L saranno piccole le y_α davanti al termine $\frac{LC}{2}$. Allora si può scrivere:

$$T_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2}} \left(1 + \frac{y_\alpha}{LC}\right),$$

$$= T\left(1 + \frac{y_\alpha}{LC}\right),$$

ove con T si indichi il periodo proprio dell' elemento isolato. Così le:

$$\frac{y_\alpha}{LC}$$

rappresentano gli *spostamenti*, i quali fanno passare dalla riga primitiva alle linee contenute nella banda che l'ha sostituita.

§ 27. *Sistema di due conduttori qualunque.* — La teoria generale dei sistemi di conduttori non presenta nessuna difficoltà analitica; solamente i calcoli sono lunghi e laboriosi.

Una semplificazione considerevole si introduce ammettendo che le azioni elettrostatiche fra capacità appartenenti a circuiti distinti siano trascurabili; tale ipotesi vogliamo appunto accettare, e la manterremo nel seguito, quando non si avverta

espressamente il contrario. Con questo non si altera ad ogni modo l'andamento generale dei fenomeni, come avremo occasione di avvertire a suo tempo.

Se si sono scritte le equazioni (II, 5) per i diversi conduttori, che compongono il sistema, è molto facile costruire la (IV, 5); in realtà l'eliminazione delle cariche dalle equazioni (IV, 3) si fa gruppo per gruppo, quindi le equazioni (IV, 4) non sono che il complesso dei sistemi (II, 4) modificati nel senso che in ciascuna equazione si devono aggiungere dei termini della forma

$$D^2 M_{\mu,\nu} i_\nu ,$$

che rappresentano l'azione induttiva, che i fili appartenenti ad *altri* conduttori esercitano sopra il filo a cui l'equazione si riferisce.

Si abbiano ad esempio due conduttori in presenza e uno contenga m fili e l'altro ne contenga r; distinguiamo i primi coi numeri da 1 ad m, i secondi coi numeri da $m+1$ ad $m+r$.

Le equazioni (II, 5) prenderanno la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \dots & P_{m,m} \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_{m+1,m+1} & P_{m+1,m+2} & \dots & P_{m+1,m+r} \\ P_{m+2,m+1} & P_{m+2,m+2} & \dots & P_{m+2,m+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m+r,m+1} & P_{m+r,m+2} & \dots & P_{m+r,m+r} \end{vmatrix} = 0 ,$$

e la (IV, 5) si scriverà senz' altro:

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,m} & D^2M_{1,m+1} & D^2M_{1,m+2} & \dots & D^2M_{1,m+r} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,m} & D^2M_{2,m+1} & D^2M_{2,m+2} & \dots & D^2M_{2,m+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \dots & P_{m,m} & D^2M_{m,m+1} & D^2M_{m,m+2} & \dots & D^2M_{m,m+r} \\ D^2M_{m+1,1} & D^2M_{m+1,2} & \dots & D^2M_{m+1,m} & P_{m+1,m+1} & P_{m+1,m+2} & \dots & P_{m+1,m+r} \\ D^2M_{m+2,1} & D^2M_{m+2,2} & \dots & D^2M_{m+2,m} & P_{m+2,m+1} & P_{m+2,m+2} & \dots & P_{m+2,m+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m+r,1} & D^2M_{m+r,2} & \dots & D^2M_{m+r,m} & P_{m+r,m+1} & P_{m+r,m+2} & \dots & P_{m+r,m+r} \end{vmatrix}=0.$$

Dividiamo quest' ultimo determinante in due matrici, una di m e l' altra di r orizzontali, e sviluppiamolo secondo i minori estratti dalla prima.

Fra i minori ci si presenta anzitutto $\mathbf{M}$ e il suo complementare è $\mathbf{R}$; sicchè una prima serie di termini nello sviluppo del determinante grande è riassunta nel prodotto $\mathbf{M}\,\mathbf{R}$.

In tutti gli altri minori, che si possono estrarre dalla matrice superiore, vi sarà almeno una verticale formata coi termini aggiunti della forma $D^2 M_{\mu,\nu}$; e la stessa cosa si deve dire dei complementari di questi altri minori; sicchè i termini dello sviluppo del nostro determinante, che non sono già contenuti nel prodotto $\mathbf{M}\,\mathbf{R}$, hanno almeno due $M_{\mu,\nu}$ a fattore, potremo dunque scrivere:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\,\mathbf{R} + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}$$

intendendo per le $G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}$ dei polinomii, i cui termini sono al minimo di ordine zero nei coefficienti $M_{\mu,\nu}$.

Se ora le $M_{\mu,\nu}$ sono piccole rispetto alle induttanze il secondo termine dell' espressione di $\mathbf{A}$ è piccolissimo rispetto al primo. Ne viene dunque che *se due conduttori differenti si trovano in presenza (e non sono troppo vicini) lo spettro, che essi emettono, è poco diverso da quello, che si otterrebbe sopraponendo gli spettri, che ciascuno fornisce quando è isolato* [1]).

1) Un teorema simile continua a valere se si tiene conto delle azioni elettrostatiche fra capacità appartenenti a conduttori diversi; purchè si supponga che le K relative a coppie prese in circuiti distinti siano piccole rispetto alle K delle coppie appartenenti ad un medesimo circuito.

§ 28. *Due conduttori ad una sola oscillazione.* — Gli spostamenti, che le righe di un dato conduttore subiscono per la presenza di un secondo conduttore di diversa natura, si lasciano calcolare agevolmente in alcuni casi semplici. In tali problemi si possono anzi fare, senza che i calcoli diventino troppo prolissi, delle ipotesi più larghe di quelle adottate nel paragrafo precedente.

Supponiamo anzitutto che si abbiano due circuiti, del tipo di quello che fu studiato nel paragrafo 5 (fig. 1 *a*); anzi per semplicità vogliamo ammettere che:

a) i due fili siano uguali;

b) non vi siano azioni fra cariche libere in uno stesso conduttore;

c) la prima capacità agisca su la prima, la seconda su la seconda, e i coefficienti di potenziale relativi alle due coppie siano uguali.

Chiamando M, al solito, il coefficiente di induzione mutua, K_1, K_2 e H i coefficienti di potenziale, e ponendo:

$$S_1 = (R + LD)D + 2K_1,$$
$$S_2 = (R + LD)D + 2K_2,$$
$$s = MD^2 + 2H,$$

verrà senz' altro:

$$S_1 i_1 + s i_2 = 0,$$
$$s i_1 + S_2 i_2 = 0;$$

e però, come caratteristica del sistema:

$$\begin{vmatrix} S_1 & s \\ s & S_2 \end{vmatrix} = S_1 S_2 - s^2 = 0.$$

Svolgendo e trascurando le resistenze si ottengono i periodi:

$$T^*, T^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2(L^2 - M^2)}{(K_1+K_2)L - 2HM \pm \sqrt{[(K_1+K_2)L-2HM]^2 - 4(K_1K_2 - H^2)(L^2-M^2)}}}.$$

Al caso trattato corrisponde la figura 3 *b*; formole simili si ottengono supponendo invece uguali le capacità e diversi i fili (fig. 3 *a*).

a *b* *c* *d*

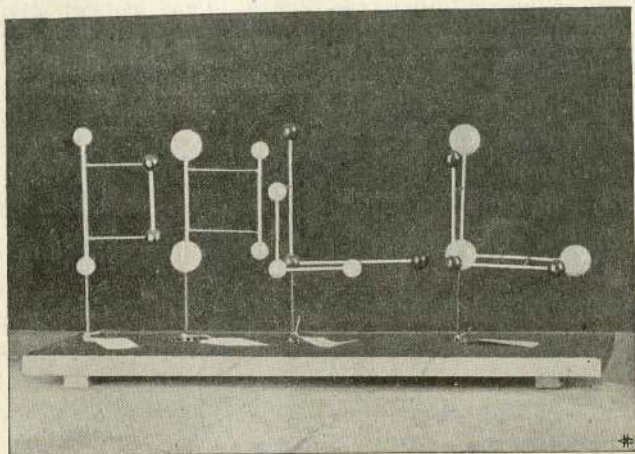



Fig. 3. — *a*) e *b*) Sistemi di due conduttori ad una oscillazione; emettono spettri di due righe. *c*) e *d*) Sistemi di due conduttori a due oscillazioni; emettono spettri di quattro righe.

§ 29. *Due conduttori a due oscillazioni.* — In secondo luogo si potrebbero prendere due conduttori del tipo di quello che è rappresentato dalla figura 1 *b*.

In armonia con ciò che si è fatto al paragrafo precedente ammettiamo che:

a) i quattro fili siano uguali;

b) il primo filo agisca sul primo, il secondo sul secondo, e i coefficienti di induzione relativi alle due coppie siano uguali;

c) non vi siano azioni fra cariche libere in uno stesso conduttore;

d) la prima capacità agisca su la prima, la seconda su la seconda, la terza su la terza, e i coefficienti di potenziale relativi alle tre coppie siano uguali.

Con le notazioni ordinarie (dette $i_{1,1}$ e $i_{1,2}$ le correnti del primo, $i_{2,1}$ e $i_{2,2}$ le correnti del secondo circuito) verrà:

$$S_1 i_{1,1} - K_1 i_{1,2} + s\, i_{2,1} - H i_{2,2} = 0\,,$$
$$-K_1 i_{1,1} + S_1 i_{1,2} - H i_{2,1} + s\, i_{2,2} = 0\,,$$
$$s\, i_{1,1} - H i_{1,2} + S_2 i_{2,1} - K_2 i_{2,2} = 0\,,$$
$$-H i_{1,1} + s\, i_{1,2} - K_2 i_{2,1} + S_2 i_{2,2} = 0\,,$$

e quindi:

$$\begin{vmatrix} S_1 & -K_1 & s & -H \\ -K_1 & S_1 & -H & s \\ s & -H & S_2 & -K_2 \\ -H & s & -K_2 & S_2 \end{vmatrix} =$$

$$=(S_1S_2+K_1K_2-s^2-H^2-K_1S_2-K_2S_1+2Hs)(S_1S_2+K_1K_2-s^2-H^2+$$
$$+K_1S_2+K_2S_1-2Hs)=0.$$

Svolgendo, trascurando le resistenze, e ponendo:

$$\tau=\frac{2\,(L^2-M^2)}{(K_1+K_2)L-2HM\pm\sqrt{[(K_1+K_2)L-2HM]^2-4(K_1K_2-H^2)(L^2-M^2)}}\,,$$

si ottengono i periodi:

$$T_1^*,\ T_1^{**}=2\,\pi\sqrt{\tau}\,,$$

$$T_2^*,\ T_2^{**}=2\,\pi\sqrt{\frac{1}{3}\tau}\,.$$

Il caso trattato corrisponde alla figura 3 *d*; formole simili si ottengono supponendo invece uguali le capacità e diversi i fili (fig. 3 *c*).

§ 30. *Due conduttori a tre oscillazioni.* — Il problema immediatamente successivo, nel quale si pongono in presenza due conduttori simili a quello della figura 1 *c*, non presenta nessuna difficoltà essenziale, ma i calcoli sono lunghi e faticosi.

I periodi vengono determinati dalle formole:

$$T_1^*, T_1^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}\tau},$$

$$T_2^*, T_2^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}\tau},$$

$$T_3^*, T_3^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}\tau}.$$ [1]

§ 31. *Sistema di due conduttori uguali.* — Quando i due conduttori in presenza hanno la stessa forma e la stessa grandezza, ragionando come al paragrafo 27, si può dimostrare che la caratteristica del sistema si svolge secondo una formola del tipo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^2 + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}.$$

E vuol dire che *se si affacciano due conduttori uguali lo spettro che essi mandano si ottiene da quello, che ciascuno dei due fornirebbe quando fosse isolato, sostituendo ad ogni riga una coppia (doublet).*

Con quale legge poi si deduca il doublet dalla riga, che gli dà origine, non è facile dire, almeno in generale; ma in un caso particolare notevole (trascurando le azioni elettrostatiche) si giunge senza molti calcoli ad un resultato semplice ed elegante.

Si consideri anzitutto un conduttore costituito da $m+1$ capacità uguali, riunite da m fili, anche uguali fra loro; ogni capacità sia incontrata da due fili, salvo la prima e l'ultima. Supponiamo ancora che le cose siano disposte per modo che l'induzione mutua sia trascurabile davanti all'autoinduzione: questo si verifica rigorosamente nei conduttori studiati ai paragrafi 6 e 7 e può verificarsi per approssimazione in una infinità di altri apparecchi, come si è avvertito a suo tempo.

1) Si veda in proposito una mia nota negli Atti della Società Ligustica di Scienze Naturali, 15, 1904.

Con i soliti simboli la caratteristica del nostro problema [l' equazione (II, 5)] si scriverà:

$$\mathbf{M}(S) = \begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & r & S \end{vmatrix} = 0.$$

A questo primo conduttore se ne affacci un secondo identico in tutto, in modo che il μ-esimo filo agisca solamente sul μ-esimo, e i coefficienti di induzione mutua per le singole coppie siano uguali. Di nuovo la cosa si può fare rigorosamente coi tre conduttori studiati ai paragrafi 5, 6 e 7 e per approssimazione con molti altri.

La (IV, 5) del sistema prenderà in generale la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s \\ s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S \end{vmatrix} = 0.$$

Si imagini adesso di dividere il determinante in due matrici di m orizzontali, e si aggiungano alle linee della prima le linee della seconda ordinatamente. Fatto questo si spezzi il determinante in due matrici di m verticali, e si tolgano dalle colonne della seconda le colonne della prima ordinatamente.

Risulterà :

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} S+s & r & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ r & S+s & r & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S+s & r \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots r & S+s & r & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & r & S+s & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & S-s & r & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & r & S-s & r & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & r & S-s & r \dots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots r & S-s & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & r & S-s \end{vmatrix}=0,$$

e quindi senz' altro :

$$\mathbf{A}=[\mathbf{M}(S+s)]\,.\,[\mathbf{M}(S-s)]\,.$$

Se dunque i periodi delle righe, che emette il conduttore isolato, sono certe funzioni dell' induttanza:

$$T_1(L)\,.\,T_2(L)\,...\,T_m(L)\,,$$

i doublets relativi al sistema di due conduttori uguali si determineranno con le formole :

$$\begin{cases} T_1(L+M) \\ T_1(L-M) \end{cases}\cdot \quad \begin{cases} T_2(L+M) \\ T_2(L-M) \end{cases}\cdots \quad \begin{cases} T_m(L+M) \\ T_m(L-M) \end{cases}\cdot$$

Con un ragionamento semplice, fondato su la considerazione delle dimensioni, si potrà poi riconoscere che le funzioni T devono essere proporzionali alla radice quadrata dell' argomento, e ne seguirà che il rapporto dei periodi, per le due righe di uno stesso doublet, è costante in tutto lo spettro e uguale a :

$$\sqrt{\frac{L+M}{L-M}}\,;$$

in altre parole, essendo T_μ il periodo di una oscillazione propria del conduttore isolato, il doublet, in cui la riga si sdoppia quando al primo conduttore se ne affaccia un secondo nel modo che s'è detto, corrisponde ai periodi:

$$T_\mu \,.\, \sqrt{\frac{L+M}{L}} \quad e \quad T_\mu \,.\, \sqrt{\frac{L-M}{L}}\ [1].$$

§ 32. *Casi particolari.* — È facile adesso sottoporre al calcolo gli apparecchi rappresentati dalle figure 4 *a*, *b*, *c*, i quali rispondono alle ipotesi, che abbiamo ammesso per la dimostrazione del teorema del paragrafo precedente.

Il primo (fig. 4 *a*), che è formato con due conduttori del tipo di quello del paragrafo 5, darà un solo doublet corrispondente ai periodi:

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)\,C}{2}}, \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)\,C}{2}}. \end{cases}$$

Il secondo (fig. 4 *b*), nel quale stanno affacciati due apparecchi, simili a quello del paragrafo 6, emette due diversi doublets coi periodi:

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{(L+M)\,C} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{(L-M)\,C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_3 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)\,C}{3}}, \\ T_4 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)\,C}{3}}. \end{cases}$$

1) Teoremi analoghi si ottengono ancora tenendo conto delle azioni elettrostatiche. Se per esempio, come ai paragrafi 28, 29 e 30, si suppone che la prima capacità di un conduttore agisca su la prima dell'altro, la seconda su la seconda, ecc. l'$(m+1)$-esima su l'$(m+1)$-esima e tutti i coefficienti di potenziale abbiano il valore comune H, si trova che alla caratteristica:

$$\mathbf{M}(S, K) = 0$$

deve sostituirsi la:

$$\mathbf{M}(S+s, K+H) \,.\, \mathbf{M}(S-s, K-H) = 0.$$

Il terzo finalmente (fig. 4 *c*), che risulta dalla riunione di due conduttori, uguali in tutto a quello da noi studiato nel

a *b* *c*

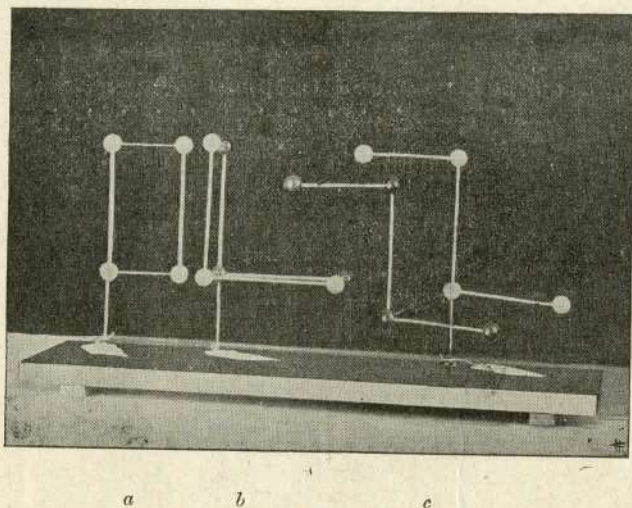



Fig. 4. — *a*) Sistema di due conduttori uguali ad una oscillazione; emette un doublet. *b*) Sistema di due conduttori uguali a due oscillazioni; emette due doublets. *c*) Sistema di due conduttori uguali a tre oscillazioni; emette tre doublets.

paragrafo 7, avrà uno spettro di tre doublets corrispondenti ai periodi:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)C}{2-\sqrt{2}}}, \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)C}{2-\sqrt{2}}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)C}{2}}, \\ T_4 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)C}{2}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_5 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)C}{2+\sqrt{2}}}, \\ T_6 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)C}{2+\sqrt{2}}}, \end{array} \right.$$

§ 33. *Sistema di tre conduttori qualunque.* — Il problema delle oscillazioni di un sistema costituito di tre conduttori differenti non presenta nessuna maggiore difficoltà di quello da noi trattato nel paragrafo 27. Anche le conclusioni a cui si arriva nei due casi sono simili.

Supponiamo, per fissare le idee, che il primo conduttore abbia m fili, il secondo r e il terzo s; siano le loro caratteristiche :

$$\mathbf{M} = 0 ,$$

$$\mathbf{R} = 0 ,$$

$$\mathbf{S} = 0 ,$$

L' equazione (5) del sistema complessivo si potrà scrivere simbolicamente :

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{M} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & \mathbf{R} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & \mathbf{S} \end{vmatrix} = 0 ,$$

intendendo per le Q certe matrici formate di termini del tipo $D^2 M_{\mu,\nu}$, relativi alle azioni che s' esercitano fra fili appartenenti a conduttori diversi.

Se, per esempio, i fili del primo conduttore si distinguono coi numeri da *1* ad m, i fili del secondo coi numeri da $m+1$ a $m+r$, i fili dell' ultimo coi numeri da $m + r + 1$ a $m+r+s$, sarà :

$$Q_{1,2} = \begin{vmatrix} D^2M_{1,m+1} & \dots & D^2M_{1,m+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m,m+1} & \dots & D^2M_{m,m+r} \end{vmatrix} \qquad Q_{1,3} = \begin{vmatrix} D^2M_{1,m+r+1} & \dots & D^2M_{1,m+r+s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m,m+r+1} & \dots & D^2M_{m,m+r+s} \end{vmatrix}$$

$$Q_{2,1} = \begin{vmatrix} D^2M_{m+1,1} & \dots & D^2M_{m+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m+r,1} & \dots & D^2M_{m+r,m} \end{vmatrix} \qquad Q_{2,3} = \begin{vmatrix} D^2M_{m+1,m+r+1} & \dots & D^2M_{m+1,m+r+s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m+r,m+r+1} & \dots & D^2M_{m+r,m+r+s} \end{vmatrix}$$

$$Q_{3,1} = \begin{vmatrix} D^2M_{m+r+1,1} & \dots & D^2M_{m+r+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m+r+s,1} & \dots & D^2M_{m+r+s,m} \end{vmatrix} \qquad Q_{3,2} = \begin{vmatrix} D^2M_{m+r+1,m+1} & \dots & D^2M_{m+r+1,m+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2M_{m+r+s,m+1} & \dots & D^2M_{m+r+s,m+r} \end{vmatrix}$$

Dividiamo il determinante **B** in due matrici, una di $m+r$ e l'altra di s orizzontali, e sviluppiamolo secondo i minori estratti dalla prima.

Fra i minori ci si presenta anzitutto quello che fu chiamato **A** al paragrafo 27 e il suo complementare è **S**; sicchè una prima serie di termini dello sviluppo del determinante grande è riassunta nel prodotto **A S**.

In tutti gli altri minori, che si possono estrarre dalla matrice superiore, vi sarà almeno una verticale formata coi termini aggiunti della forma $D^2 M_{\mu,\nu}$; e la stessa cosa deve dirsi dei complementari di questi altri minori. Tutti i termini dello sviluppo del nostro determinante, che non sono già contenuti nel prodotto **A S** hanno dunque almeno due $M_{\mu,\nu}$ a fattore.

Se ora si rammenta l'espressione del determinante **A** si potrà scrivere senz' altro:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\,\mathbf{R}\,\mathbf{S} + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'},$$

avendo le $G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}$ il solito significato.

Se le $M_{\mu,\nu}$ sono piccole rispetto ai coefficienti di autoinduzione, il secondo termine dell' espressione di **B** è piccolissimo rispetto al primo.

Ne viene dunque che: *se tre conduttori differenti si trovano in presenza (e non sono troppo vicini) lo spettro che essi emettono è poco diverso da quello, che si otterrebbe sopraponendo gli spettri relativi ai singoli conduttori isolati.*

§ 34. *Sistema di tre conduttori uguali: caso particolare.* — Quando i tre conduttori in presenza hanno la stessa forma e la stessa grandezza, ragionando come al paragrafo precedente, si può dimostrare che la caratteristica del sistema si svolge secondo una formola del tipo:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^3 + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}.$$

E però: *se si affacciano tre conduttori uguali lo spettro che essi mandano si ottiene da quello, che ciascuno dei tre fornirebbe quando fosse isolato, sostituendo ad ogni riga una terna (triplet).*

La legge poi, con la quale si deduce il triplet dalla riga a cui corrisponde, non si può esprimere facilmente a parole, anche se il sistema considerato è molto semplice.

Per fare un esempio cerchiamo di vedere ciò che corrisponde allo schermo di risonatori studiato al paragrafo 26, nel caso particolare di $a = 3$.

L' equazione in y (la *) fornisce :

$$\begin{vmatrix} -\frac{2y}{C} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{1,2} & -\frac{2y}{C} & M_{2,3} \\ M_{1,3} & M_{2,3} & -\frac{2y}{C} \end{vmatrix} =$$

$$= y^3 - \frac{1}{4}(M^2_{1,2} + M^2_{1,3} + M^2_{2,3})\, C^2 y - \frac{1}{4} M_{1,2} M_{1,3} M_{2,3} C^3 = 0 .$$

Se si suppone ancora che, come nella figura 6 a, sia :

$$M_{1,2} = M_{2,3} = M ,$$
$$M_{1,3} = m ,$$

verrà :

$$y^3 - \frac{1}{4}(m^2 + 2M^2)\, C^2 y - \frac{1}{4} m M^2 C^3 =$$
$$= \left(y + \frac{mC}{2}\right)\left(y^2 - \frac{mC}{2} y - \frac{M^2C^2}{2}\right) = 0 .$$

Il sistema emette dunque un triplet coi periodi :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_1} ,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_2} ,$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_3} ,$$

essendo :

$$y_1 = -\frac{mC}{2},$$

$$y_2 = \frac{C}{4}\left(m + \sqrt{m^2 + 8M^2}\right),$$

$$y_3 = \frac{C}{4}\left(m - \sqrt{m^2 + 8M^2}\right).$$

§ 35. *Ancora le oscillazioni di un sistema di conduttori.* — Il teorema, che abbiamo dimostrato nei paragrafi 27 e 33 per i sistemi composti di due e tre conduttori, si può estendere senz' altro ad un sistema di a conduttori.

Se le caratteristiche di questi sono date sotto la forma :

$$\mathbf{M}_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, a$$

la caratteristica del sistema complessivo potrà scriversi simbolicamente :

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_1 & Q_{1,2} & Q_{1,3} & \ldots & Q_{1,a} \\ Q_{2,1} & \mathbf{M}_2 & Q_{2,3} & \ldots & Q_{2,a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{a,1} & Q_{a,2} & Q_{a,3} & \ldots & \mathbf{M}_a \end{vmatrix} = 0.$$

Di nuovo le $Q_{\alpha,\beta}$ sono matrici di termini della forma $D^2 M_{\mu,\nu}$, relativi all' azione, che si esercita fra i fili dell'α-esimo e quelli del β-esimo conduttore. La $Q_{\alpha,\beta}$ ha α orizzontali e β verticali, non è dunque la stessa cosa che $Q_{\beta,\alpha}$.

Col procedimento di prima si dimostrerà che è :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_1 . \mathbf{M}_2 \ldots \mathbf{M}_a + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu,\mu',\nu'},$$

ed anche, quando tutti i conduttori siano uguali :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_\alpha^a + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'}.$$

Possiamo dunque concludere che *se a conduttori differenti si trovano in presenza (e non sono troppo vicini) lo spettro che essi emettono è poco diverso da quello, che si otterrebbe sopraponendo gli spettri relativi ai singoli conduttori isolati.*

E ancora: *se si affacciano a conduttori uguali lo spettro che essi mandano si ottiene da quello, che ciascuno fornirebbe quando fosse isolato, sostituendo ad ogni riga una banda composta di a righe* [1].

§ 36. *Oscillazioni di un sistema di sistemi.* — Il problema delle oscillazioni di un sistema di sistemi non è analiticamente diverso da quello di un sistema di conduttori semplici; in realtà dipende da noi di pensare i singoli conduttori isolatamente o di pensarli invece riuniti in gruppi. Nella pratica però, e nel resultato dei calcoli, i due problemi sono diversi, perchè si dirà di avere un sistema di conduttori quando i coefficienti di induzione mutua, per ogni coppia di tali conduttori, hanno il medesimo ordine di grandezza, si dirà invece di avere un sistema di sistemi se i coefficienti relativi a certe coppie sono piccoli rispetto a quelli, che si calcolano per altre coppie.

La caratteristica del sistema di sistemi si costruisce al modo solito con le caratteristiche dei sistemi componenti. E quindi i teoremi dell' ultimo paragrafo valgono ancora quando alla parola *conduttore* si sostituisca la parola *sistema*.

§ 37. *Note bibliografiche al Capitolo quarto.* — Il caso di due conduttori differenti (ad una oscillazione) fu trattato con molti sviluppi dall' Oberbeck [2].

Anche il primo fra i problemi del paragrafo 32, e il problema del paragrafo 34, si trovano già risolti in due memorie del principe Galitzin [3].

Finalmente il caso del paragrafo ventesimosesto fu studiato dal v. Geitler [4], il quale, sotto alcune condizioni restrittive, stabilì il resultato esatto che un sistema di a circuiti ad una oscillazione emette uno spettro di a righe.

1) Teoremi simili valgono al solito anche se le azioni fra capacità non sono più trascurabili.

2) A. Oberbeck. Wied. Ann., 55, 1895.

3) B. Galitzin. Wied. Ann., 56, 1895 e Bull. de l'Ac. Imp. de St.-Pétersbourg, (5), 3, 1895.

4) I. v. Geitler. Wied. Ann., 57, 1896. Il v. Geitler ritorna su l'argomento in un lavoro successivo (Wied. Ann., 66, 1898) dove insieme ad alcuni sviluppi analitici, è data una verifica sperimentale della teoria per il caso di $a = 2$.

La teoria generale di un sistema di conduttori complessi, e quella di un sistema di sistemi, e gli altri sviluppi di questo capitolo mi appartengono [1]).

CAPITOLO QUINTO.

Teoria elettromagnetica dell' analisi spettrale.

§ 38. *Modello per le molecole materiali.* — L' osservazione del paragrafo 36, secondo la quale i sistemi di sistemi godono di alcune fra le proprietà più importanti dei sistemi di conduttori, ci permette di costruire un modello per le molecole materiali, lasciando impregiudicato il problema della struttura degli atomi.

E però vogliamo considerare questi ultimi, almeno per ora, come semplici circuiti, e quindi rappresentare le molecole con sistemi di conduttori.

Per il primo teorema del paragrafo 35 dovremo dunque ritenere che lo spettro di un corpo composto risulti soprapponendo gli spettri dei suoi componenti, e deformandoli un poco. Dalla quale osservazione segue subito il perchè delle opinioni discordi, che furono espresse da varii autori su questo argomento.

Se infatti i singoli sistemi componenti hanno dei periodi, che corrispondono a regioni molto diverse nella scala luminosa, sarà facile riconoscere i loro spettri, anche se un poco deformati; ma se le righe dei varii sistemi si alternano, il voler assegnare le onde della molecola complessa al primo o al secondo o ad altro componente è opera vana.

A ragione dunque il Kayser ritiene arbitrarie le conclusioni del Grünwald e del Ciamician, perchè in nessun modo giustificate; il che non toglie che quelle conclusioni qualche cosa di vero possano anche contenere.

Il Grünwald, per esempio, trova che lo spettro del vapore d' acqua si deduce sopraponendo gli spettri dell' idrogeno e

1) A. Garbasso. Mem. R. Acc. di Torino, (2), 53, 1903.

dell' ossigeno, dopo di aver moltiplicati i periodi del primo per $\frac{1}{2}$ e quelli del secondo per $\frac{23}{32}$ o $\frac{5}{8}$. Se la regola fosse destituita di fondamento non avrebbe permesso di calcolare un gran numero di righe nell' ultravioletto, le quali furono poi riscontrate da Liveing e Dewar.

Del resto, un fatto simile a quello, che il Grünwald credette di riconoscere, si verifica nel sistema (estremamente più semplice a vero dire) della figura 3 *d*.

Le formole del paragrafo 29 sono bensì troppo complesse perchè se ne possa vedere chiaro il significato; ma in alcuni casi particolari si prestano ad ogni modo ad una interpretazione semplice. Supponiamo anzitutto che K_1 e K_2 siano assai diversi e che le quantità

$$\varepsilon = \frac{M}{L}, \quad \alpha_1 = \frac{H}{K_1}, \quad \alpha_2 = \frac{H}{K_2}$$

siano piccole, così piccole che si possano già trascurare le potenze superiori alla seconda.

Verrà :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{L}{K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

e :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{L}{K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

secondo che si prende davanti alla radice, a denominatore dell' espressione di τ, il segno + o il segno —.

Segue dunque senz' altro :

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

$$T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon + \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

$$T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

Sotto altra forma, se si chiamano $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ i periodi relativi ai due conduttori *isolati* e si pone ancora:

$$\theta_1 = \frac{K_1 (\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)},$$

$$\theta_2 = \frac{K_2 (\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)},$$

risulterà (secondo il paragrafo 6):

$$T_1^* = T_1^{(1)} (1 - \theta_1),$$

$$T_1^{**} = T_1^{(2)} (1 - \theta_2),$$

$$T_2^* = T_2^{(1)} (1 - \theta_1),$$

$$T_2^{**} = T_2^{(2)} (1 - \theta_2).$$

I periodi del sistema composto si ottengono dunque moltiplicando per certe costanti gli spettri dei conduttori componenti.

Si riconosce poi facilmente che, a parità delle altre circostanze, è tanto più spostato lo spettro del primo conduttore quanto più grande è C_2, ed è tanto più spostato lo spettro del secondo conduttore quanto più grande è C_1.

Questi resultati possono mettersi in relazione col fatto, riconosciuto da Mitscherlich, da Lecoq de Boisbaudran e da altri, che, quando si studiano successivamente i cloruri, bromuri e ioduri di uno stesso metallo, si vedono certi gruppi di righe spostarsi man mano, e sempre nel medesimo senso.

In un ordine di fenomeni più complesso fu trovato, molti anni or sono, dal Bunsen che nello spettro dei composti del didimio certe righe si vanno avvicinando ad un estremo, col crescere del peso molecolare.

Un esempio numerico, e il calcolo effettivo delle lunghezze d'onda corrispondenti ad un sistema del tipo di quello rappresentato nella figura 3 *d*, renderanno anche più chiari i resultati della teoria.

La figura 5 comprende appunto (in *1* e *3*) due conduttori simili a quello del paragrafo 6. In *2* questi conduttori sono riuniti in sistema.

Per calcolare gli spettri corrispondenti ho supposto che i fili fossero lunghi 30 cm. e spessi 0,03; le capacità sono pal-

line di 3 cm. di diametro nel conduttore *1* e palline di 4 cm. nel conduttore *3*.

Nel sistema della figura 2 la distanza fra i fili paralleli è di 10 cm.

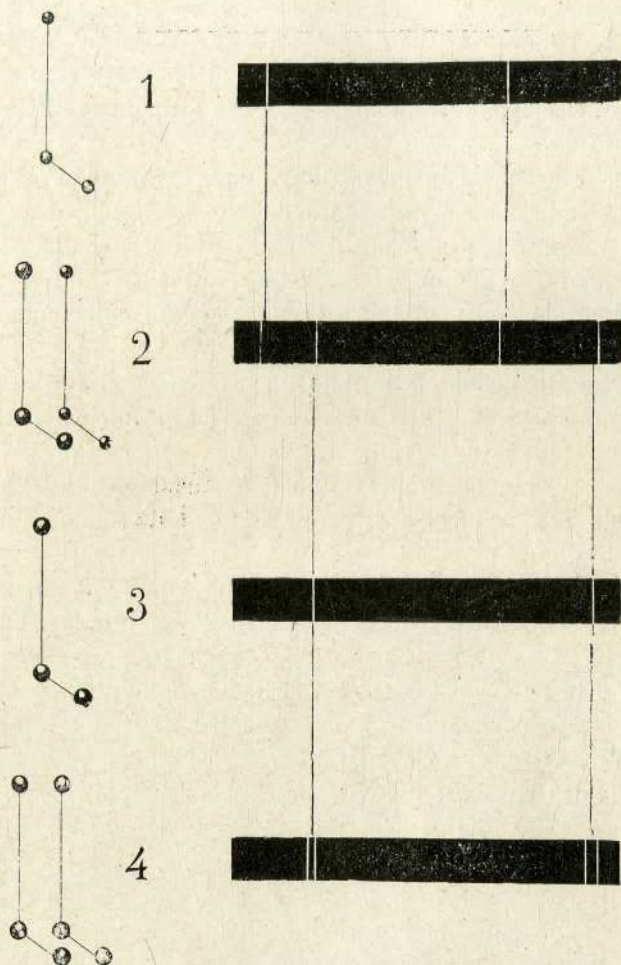



Fig. 5.

Le lunghezze d'onda che si ottengono con questi dati sono le seguenti:

1.		76,9			133,2	
2.	76,1		89,3	131,9		154,7
3.		88,8			153,8	

Conduttori e spettri furono disegnati in vera grandezza e poi fotografati; siccome le lunghezze d'onda variano come le dimensioni lineari dei sistemi che le emettono, la rappresentazione continua a valere.

§ 39. *Variazioni nello spettro.* — L'esistenza degli spettri a colonnati, e le variazioni dovute al riscaldamento e alla pressione si spiegano semplicemente col secondo teorema del paragrafo 35.

Perchè è chiaro in primo luogo che, diventando più complessa la molecola, come è senza dubbio nei liquidi e nei solidi, le singole righe devono essere sostituite da bande; in secondo luogo è evidente del pari che l'influenza mutua delle varie molecole potrà produrre l'allargamento delle righe caratteristiche.

In realtà, quando fosse dato un sistema composto di a sistemi (molecole) uguali, e lo si tenesse da principio distribuito in uno spazio relativamente grande, per poi raccoglierlo man mano in un volume sempre minore, la caratteristica subirebbe essa pure una modificazione progressiva, della quale è facile rendersi conto.

All'origine, essendo piccolissime le azioni induttive fra due elementi del sistema, il secondo polinomio dello sviluppo si potrebbe trascurare rispetto al primo. Questo, che nel caso attuale è la potenza a-esima del primo membro dell'equazione (IV, 5) relativa a ciascun elemento, determinerebbe annullandosi uno spettro, il quale non differisce da quello caratteristico degli elementi isolati.

In seguito, diminuendo le distanze, il secondo polinomio comincerà ad assumere valori, che non sono più del tutto trascurabili; ogni riga dello spettro si scinde adesso in a righe distinte, ma vicinissime. O meglio, in pratica, essendo a molto grande, ogni riga dà luogo ad una banda di larghezza finita.

Tali bande poi si andranno allargando sempre più col diminuire dello spazio, in cui il sistema è immerso.

§ 40. *Molecole di corpi isomeri.* — Il teorema del paragrafo 25 sembra contraddire a un resultato notissimo dell'espe-

rienza, secondo il quale corpi chimicamente isomeri hanno spesso degli spettri diversi non solo per la posizione, ma anche per il numero delle righe. Però il disaccordo è più che altro apparente.

La formola:

$$\Gamma = \sum_{1}^{a} \alpha \, (p_\alpha + m_\alpha) - a$$

assegna in realtà un valore massimo per il grado della caratteristica; non è escluso che, per una scelta particolare delle costanti, o una disposizione speciale dell'apparecchio, il grado si abbassi o certe radici diventino doppie o multiple.

Mi propongo di verificare la cosa con un esempio particolare, e scelgo all'uopo il sistema, che fu studiato nel paragrafo 34. Se in questo l'ultimo dei tre elementi fosse normale agli altri due (fig. 6 *b*) bisognerebbe annullare tutte le Q (si confronti il paragrafo 33) che contengono l'indice 3 e verrebbe:

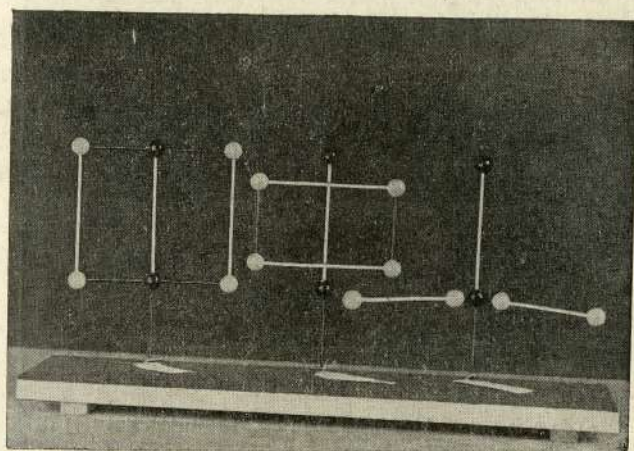
$$\begin{vmatrix} S & s & 0 \\ s & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} S & s \\ s & S \end{vmatrix} = 0;$$

a *b* *c*

Fig. 6. — *a*) Sistemi di tre conduttori uguali ad una oscillazione; emette un triplet. *b*) Sistema isomero del precedente; ha uno spettro di tre righe. *c*) Sistema isomero del 5 *a*; ha uno spettro di una sola riga.

il sistema avrebbe dunque, come prima, uno spettro di tre righe, ma sarebbero adesso quelle, che corrispondono ai casi delle figure 1 *a* e 4 *a*.

Le cose si semplificano ancora se supponiamo che i tre conduttori siano disposti in modo che ciascuno risulti in condizioni uguali rispetto agli altri due. È ciò che accade così nell'ordinamento « a cilindro » della figura 7 *a*, come nell'ordinamento « a triangolo » della figura 7 *b*, come nell'ordinamento « a stella » della figura 7 *c*. Qui si può scrivere infatti:

$$Q_{1,2} = Q_{2,1} = Q_{2,3} = Q_{3,2} = Q_{1,3} = Q_{3,1} = D^2 M = s\,,$$

e poi:

$$\begin{vmatrix} S & s & s \\ s & S & s \\ s & s & S \end{vmatrix} = (S - s)^2 (S + 2s) = 0\,,$$

la quale equazione significa che il sistema non emette più tre colori diversi, ma bensì due soli.

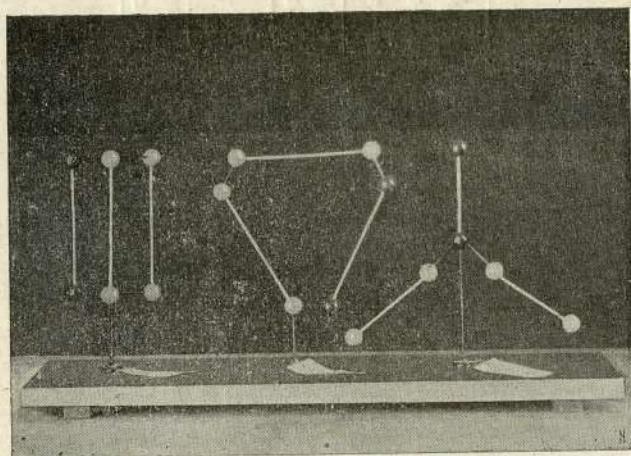



Fig. 7. — *a*) *b*) e *c*) Sistemi isomeri del 6 *a*; hanno spettri di due sole righe.

Finalmente quando si disponessero, come nella figura 6 *c*, i tre conduttori secondo gli spigoli di un triedro trirettangolo, verrebbe:

$$Q_{1,2} = Q_{2,1} = Q_{2,3} = Q_{3,2} = Q_{1,3} = Q_{3,1} = 0\,,$$

e quindi:

$$\begin{vmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = S^3 = 0;$$

la vibrazione dunque si riduce ad una sola componente, quella stessa che è propria dei singoli conduttori isolati.

§ 41. *Modelli possibili per gli atomi materiali.* — Per gli atomi materiali sono possibili, come si avvertiva innanzi, due modelli diversi, i quali, *a priori*, sembrano ugualmente accettabili: possiamo pensare in realtà che il complesso vibrante si riduca ad un circuito unico, o ammettere invece che risulti dalla riunione di parecchi conduttori.

Ora è facile stabilire che, così nell' una come nell' altra ipotesi, la struttura corrispondente ad uno spettro proposto non è mai determinata, e lo è tanto meno quanto più cresce il numero delle righe.

Inoltre la teoria, da sola, è impotente a decidere se il primo o il secondo modello sia da preferirsi.

In questi teoremi sta senza dubbio la ragione intima dell' incapacità dimostrata in tanti casi dall' analisi spettrale.

§ 42. *Numero dei conduttori possibili ad* n *oscillazioni.* — Limitandomi per ora al caso più semplice, che è quello di un circuito unico, mi propongo di far vedere che *se si domanda di costruire un conduttore, capace di emettere uno spettro di* n *righe, vi sono sempre pel problema* n *soluzioni distinte.*

Questo teorema si ottiene con tutta facilità.

Abbiamo veduto al paragrafo 4 che in un conduttore fornito di p capacità e di m fili ogni carica ed ogni corrente soddisfa ad un' equazione differenziale, lineare ed omogenea, a coefficienti costanti, dell' ordine:

$$\gamma = p + m - 1;$$

se si vuole che lo spettro della radiazione emessa abbia n righe bisognerà dunque fare:

$$(*) \qquad n = \frac{\gamma}{2} = \frac{p + m - 1}{2} ,$$

e però:

$$(**) \qquad p + m = 2k + 1 ,$$

con k intero.

Ciò posto, si risponde manifestamente al quesito assumendo per p ed m una qualunque fra le coppie registrate nella tabella che segue:

p	m
2	$(2k + 1) - 2$
3	$(2k + 1) - 3$
4	$(2k + 1) - 4$
...	....
r	$(2k + 1) - r$

L' ultima coppia si determina con la considerazione che il minimo numero possibile di fili è raggiunto quando la prima capacità si attacca direttamente alla seconda, la seconda alla terza, ecc., la penultima all' ultima.

In questo caso particolare il numero delle capacità supera di uno il numero dei fili; avremo dunque:

$$r = [(2k + 1) - r] + 1 ,$$

vale a dire:

$$k = r - 1 .$$

Ma le soluzioni possibili, che si deducono dalla tabella, sono tante quante sono le orizzontali, cioè:

$$r - 1,$$

o, per l' ultimo risultato:

$$k.$$

Osserveremo adesso che confrontando la (*) con la (**) si ottiene:

$$k = \frac{\gamma}{2} = n,$$

in perfetto accordo con ciò che si era annunciato.

Realmente vi è un solo conduttore possibile ad una oscillazione (a), ve ne sono due a due oscillazioni (b, c) tre a tre (d, e, f), quattro a quattro (g, h, i, l), cinque a cinque (m, n, o, p, q), sei a sei (r, s, t, u, v, z) e così di seguito [1]).

Per un atomo come è quello del ferro i modelli possibili (*zülassige Bilder* del Hertz) si contano dunque a migliaia.

Anzi l' indeterminazione è anche maggiore di ciò che si potrebbe ritenere a prima vista; in ogni gruppo i conduttori che contengono più di due capacità si possono infatti costruire secondo diversi diagrammi (senza che cambino p ed m).

§ 43. *Numero dei sistemi corrispondenti ad uno spettro assegnato.* — Conforme alla teoria esposta nel quarto capitolo uno spettro di n righe si può ottenere, invece che da un conduttore unico, da un sistema di conduttori, quando si riuniscano insieme degli elementi capaci di emettere:

$$\alpha, \beta \ldots \omega$$

righe, di modo che risulti:

$$\alpha + \beta + \ldots + \omega = n.$$

Spettri di due, tre, quattro, cinque e sei righe corrispondono dunque ai sistemi qui appresso registrati [2]).

1) Si veda in proposito un mio lavoro in Mem. R. Acc. di Torino, (2), LIV, 1904.

2) Il metodo, che si presenta più naturale per il calcolo del numero (N) dei sistemi ad n righe, è il seguente:

Si decomporrà il numero n in tutti i modi possibili in termini interi, così da ottenere tante relazioni della forma

(*) $$n = \alpha + \beta + \ldots + \quad ;$$

per ciascuna di queste relazioni si farà il prodotto:

$$\nu_\mu = \alpha . \beta \ldots \omega,$$

e si sommeranno da ultimo le ν, scrivendo:

$$N = \Sigma \nu_\mu .$$

2 righe . . (aa);

3 righe . . (aaa), (ab), (ac);

4 righe . . $(aaaa)$, (aab), (aac), (ad), (ae), (af), (bb), $bc)$, (cc);

5 righe . . $(aaaaa)$, $(aaab)$, $(aaac)$, (aad), (aae), (aaf), (ag), (ah), (ai), (al), (abb), (abc), (acc), (bd), (be), (bf), (cd), (ce), (cf);

Bisogna però notare che, per questa via, talune combinazioni si presentano più volte, e la cosa si verifica sempre quando una o più poste al secondo membro di una equazione (*) risultano uguali. L'unità fa eccezione. Il numero n' dei termini spurii si dovrà naturalmente sottrarre dal risultato definitivo; sicchè la formola esatta la dovremo scrivere:

$$N = \Sigma \nu_\mu - n'.$$

Per $n = 2$, ad esempio, si ha il solo svolgimento:

$$n = 1 + 1;$$

viene dunque:

$$\nu = 1,$$

ed:

$$N = 1.$$

Per $n = 3$ si ottiene:

$$n = 1 + 1 + 1, \quad = 1 + 2,$$

e di conseguenza:

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad N = \nu_1 + \nu_2 = 3.$$

Per $n = 4$ risulta:

$$n = 1 + 1 + 1 + 1, \quad = 1 + 1 + 2, \quad = 1 + 3, \quad = 2 + 2,$$

e quindi:

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 3, \quad \nu_4 = 4, \quad \Sigma \nu_\mu = 10.$$

Dall'ultimo termine bisogna però dedurre il numero delle combinazioni di due oggetti a due a due, cioè:

$$\binom{2}{2} = 1 = n';$$

6 righe . . ($aaaaaa$), ($aaaab$), ($aaaac$), ($aaad$), ($aaae$), ($aaaf$), (aag), (aah), (aai), (aal), ($aabb$), ($aabc$), ($aacc$), (am), (an), (ao), (ap), (aq), (abd), (abe), (abf), (acd), (ace), (acf), (bbb), (bbc), (bcc), (ccc), (dd), (ee), (ff), (de), (df), (ef), (bg), (bh), (bi), (bl), (cg), (ch), (ci), (cl).

---

e però si ottiene:

$$N = \Sigma\nu_\mu - n' = 10 - 1 = 9.$$

Per $n = 5$ verrebbe:

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 1 + 3, \\ &= 1 + 4, \\ &= 1 + 2 + 2, \\ &= 2 + 3, \end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \nu_5 &= 4, \\ \nu_6 &= 6. \end{aligned}$$

Ma dal quinto termine bisogna nuovamente dedurre $\binom{2}{2}$ cioè uno, e però si ottiene:

$$N = \Sigma\nu_\mu - n' = 20 - 1 = 19.$$

Per $n = 6$ finalmente bisogna scrivere:

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 1 + 1 + 3, \\ &= 1 + 1 + 4, \\ &= 1 + 1 + 2 + 2, \\ &= 1 + 5, \\ &= 1 + 2 + 3 \\ &= 2 + 2 + \ , \\ &= 2 + 4, \\ &= 3 + 3 \end{aligned}$$

Sicchè, riunendo le soluzioni (indipendenti) trovate per il caso del conduttore unico con quelle che incontriamo ora, si otterrà lo specchietto qui appresso:

Numero delle righe contenute nello spettro	Soluzioni del problema		
	Conduttore unico	Sistema di conduttori	Numero totale
1	1	0	1
2	2	1	3
3	3	3	6
4	4	9	13
5	5	19	24
6	6	42	48

---

risulta di qui:

$$\nu_1 = 1,$$
$$\nu_2 = 2,$$
$$\nu_3 = 3,$$
$$\nu_4 = 4,$$
$$\nu_5 = 4,$$
$$\nu_6 = 5,$$
$$\nu_7 = 6,$$
$$\nu_8 = 8,$$
$$\nu_9 = 8,$$
$$\nu_{10} = 9,$$

Si noti adesso che dal quinto termine bisogna togliere:

$$\binom{2}{2} = 1,$$

dall'ottavo:

$$4\binom{2}{2} = 4,$$

e dal decimo:

$$\binom{3}{2} = 3.$$

Viene dunque:

$$n' = 1 + 4 + 3 = 8,$$

e da ultimo:

$$\mathrm{N} = \Sigma\nu_\mu - n' = 50 - 8 = 42.$$

E però l'indeterminazione cresce, e cresce molto rapidamente, col numero delle righe che si vogliono emesse dal modello.

Riassumendo dunque sembra fatica vana, nella massima parte dei casi, il tentar di stabilire qualche resultato su la possibile struttura di atomi materiali, con *la semplice considerazione* degli spettri corrispondenti.

La cosa è tanto più vera per il fatto che un computo di costanti fa riconoscere subito come il problema rimanga indeterminato, quando anche si assegnino i rapporti delle lunghezze d' onda [1]).

1) Sia dato, per fare un caso semplice, un conduttore come quello del paragrafo 6 e si supponga che in esso i due fili e le tre capacità siano uguali fra loro.

I periodi saranno forniti senz'altro dalle formole:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{LC} \,,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{3}} \,,$$

essi hanno dunque un rapporto bene determinato.

Malgrado questo lo stesso spettro si può anche ottenere, ad esempio, dal sistema della figura 4 *a*. Supposti uguali fra loro, anche nel caso presente, i fili e le capacità, verrà subito (§ 32):

$$T'_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)\gamma}{2}} \,,$$

$$T'_2 = 2\pi \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)\gamma}{2}} \,.$$

La congruenza degli spettri si ottiene quando siano soddisfatte le condizioni:

$$2\,LC = (\lambda + \mu)\,\gamma \,,$$

e: (*)

$$\frac{2}{3}\,LC = (\lambda - \mu)\,\gamma \,,$$

dalle quali risulta anzitutto

$$\frac{4}{3}\,LC = \lambda\gamma \,,$$

e:

$$\frac{2}{3}\,LC = \mu\gamma \,,$$

e, dividendo membro a membro.

$$\mu = \frac{\lambda}{2} \,.$$

Portando poi questo valore in una qualunque delle (*) si ricava:

$$\lambda\gamma = \frac{4}{3}\,LC \,.$$

Non solo dunque i vincoli imposti sono accettabili, ma vi è anzi un sistema semplicemente infinito di soluzioni.

§ 44. *Un possibile indirizzo dell' analisi spettrale.* — Una volta dimostrati i teoremi dei paragrafi precedenti, si vede subito quale sia la strada, che conviene battere, quando, da uno spettro osservato, si voglia ricavare qualche indizio su la natura del complesso vibrante.

Bisognerà anzitutto procurare di riconoscere se l' atomo che si considera, comprenda un solo conduttore o invece ne abbia parecchi, e ricercare in seguito la forma dei singoli elementi. Per questa via l' indeterminazione del problema risulta infatti sensibilmente diminuita.

Se, per esempio, lo spettro proposto ha sei righe, e, con qualche artifizio sperimentale, si riesce a stabilire che il sistema emittente contiene due conduttori a tre oscillazioni, la difficoltà di determinare la forma di ciascuno (e quindi dell' intero complesso) diventerà di gran lunga minore, che non sarebbe stata da principio. In luogo di *48* casi possibili ne resteranno infatti *3* soli superstiti per ogni elemento.

§ 45. *Ricerche di Sir N. Lockyer: linee lunghe e linee brevi.* — Indagini nel senso indicato furono condotte già, se pure senza preconcetto teorico, da molti anni e da varii autori.

In primo luogo, per la data e per l' importanza, conviene citare le belle ricerche di Sir N. Lockyer su le *Linee lunghe e brevi* [1]).

Il Lockyer [2]) osservava nelle sue esperienze delle scintille fra elettrodi metallici; e poneva davanti allo spettroscopio una lente, per modo che sopra la fenditura (allargata) si venisse a formare della scintilla una imagine reale.

In queste condizioni [3]) « se i poli sono di due diversi elementi si produrranno tre spettri distinti. Nella parte superiore

1) Sono riassunte, almeno in parte, negli *Studi di analisi spettrale*, dei quali esiste una traduzione italiana (Milano, F.lli Dumolard, 1878).

Prima del Lockyer lo Stokes (" Phil. Trans. ", CLII, 1862), osservando direttamente una scintilla elettrica, con lo spettroscopio privo di fenditura, aveva notato che le righe metalliche si distinguevano da quelle dell'aria, perchè apparivano solo a piccola distanza dalle punte degli elettrodi, mentre le altre attraversavano lo spettro in tutta la larghezza.

2) L. c., Capitolo II, 42 e Capitolo V, 132.

3) L. c., 46.

apparirà una regione ricca del vapore più basso, nella parte inferiore una regione ricca del vapore più alto, ed una frammezzo ricca nè dell' uno, nè dell' altro. Così abbiamo nello spettro come tre strati, almeno: e cioè gli spettri del vapore superiore, del vapore inferiore, e della regione centrale ».

« Si capisce a prima vista, che si produrrà una condizione di cose assai somigliante se invece di una scintilla adopereremo un arco elettrico, nel quale il solo vapore della sostanza resa incandescente occupi tutto l' intervallo fra i due poli. Possiamo proiettare l' imagine di un tale arco *(orizzontale)* sopra una fessura verticale; la quale così ci darà lo spettro di una sezione ad essa perpendicolare..... il vapore, che si trova lontano dal nucleo dell' arco, dà uno spettro assai più semplice di quello, che si trova nel nucleo medesimo. Lo spettro del nucleo consiste di una grande quantità di linee, le quali vanno scemando di numero: finchè quello delle regioni più laterali si riduce ad una linea sola (*sic*) ».

Quelle righe, che appartengono alla radiazione di diverse regioni della scintilla o dell' arco, appariscono naturalmente nello spettro *più lunghe* delle altre, che caratterizzano una sola regione in modo particolare.

Il Lockyer osserva in fine, e la cosa deriva con tutta naturalezza da ciò che precede, che le righe *lunghe* si mostrano più facilmente delle altre e in condizioni assai varie.

Da queste esperienze il nostro autore dedusse subito la verisimiglianza della *dissociazione dei così detti elementi;* ma concluse anche all' impossibilità di stabilire la cosa per via di esperienze.

Cito letteralmente [1]).

« Si può certo ammettere che il calcio una volta formato, sia poi un elemento o no, costituisce un ente distinto; e per conseguenza, se ci limitiamo a sperimentare sopra di esso, non potremo mai decidere, ancorchè, in avvenire, se ne accertasse la dissociazione, se la temperatura produce una forma più semplice, una condizione più atomica della medesima cosa, oppure se la sostanza si decompone effettivamente in X + Y; e ciò perchè, nè X nè Y potranno mai variare di proporzione ».

1) L. c., 182.

Vale la pena di considerare un poco da vicino codesto ragionamento, perchè in realtà, sebbene appaia limpido e piano, esso è in disaccordo con i resultati più semplici e più sicuri della teoria.

Ho stabilito al paragrafo 35 che se si considera un sistema di α conduttori, e le caratteristiche di questi sono date sotto la forma:

$$\mathbf{M}_\alpha = 0\,, \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots a)$$

la caratteristica del sistema complessivo potrà scriversi simbolicamente:

$$\mathbf{M}_1 \,.\, \mathbf{M}_2 \ldots \mathbf{M}_\alpha + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'} = 0\,.$$

Se uno dei conduttori, per esempio il conduttore $\mathbf{M}_\alpha$, venisse a separarsi dal sistema, si otterrebbe subito, come nuova caratteristica:

$$\mathbf{M}_\alpha \{\mathbf{M}_1 \,.\, \mathbf{M}_2 \ldots \mathbf{M}_{\alpha-1} \,.\, \mathbf{M}_{\alpha+1} \ldots \mathbf{M}_a + \Sigma G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}\} = 0,$$

essendo adesso le μ, ν, μ', ν' soggette alla restrizione di non poter mai assumere i valori propri dei fili contenuti nell'α-esimo conduttore.

A parole: per il solo fatto che l'elemento α è uscito dal sistema, *tutte* le righe dello spettro appariranno spostate.

Non è vero dunque che l'esperienza non sia in caso di decidere se il calcio o un altro metallo si dissocia nella scintilla elettrica; anzi le fotografie ottenute dal Lockyer, mostrando le linee (lunghe o brevi) perfettamente diritte, provano con tutta sicurezza che, nelle condizioni delle sue esperienze, la dissociazione *non* è avvenuta.

§ 46. *Ricerche di Sir N. Lockyer: linee basiche.* — Il Lockyer, dalle sue osservazioni su le linee lunghe e le linee brevi, volle dedurre anche un'altra conseguenza, che, quando fosse confermata, avrebbe un'importanza eccezionale.

Se, per esempio, studiando [1]) gli spettri del calcio e dello stronzio incontrava una stessa linea, ma lunga nel primo e breve nel secondo, questa veniva da lui attribuita ad una

1) H. Kayser. Handbuch der Spektroscopie, II, 264, 1902.

impurità (tracce di calcio), almeno nel caso in cui apparissero, con quello dello stronzio, anche le righe più lunghe dello spettro del calcio.

Nel caso opposto restavano due soluzioni possibili. O la riga apparteneva ad un terzo elemento, o era veramente comune al *Ca* e allo *Sr*, derivando da una porzione, che si ritroverebbe in entrambi gli atomi.

Ma la prima ipotesi si poteva scartare facilmente col confronto degli altri spettri, e in particolare di quelli proprii dei corpi più affini.

Per questa via il Lockyer fu condotto a ritenere che esistono veramente nella natura delle righe, caratteristiche di più corpi ad un tempo. E le chiamò *linee basiche*.

Mentre dunque dalle prime ricerche risultava, secondo il fisico inglese, la complessità degli atomi, da queste ultime egli dedusse la prova che in più atomi si può ripresentare il medesimo sistema vibrante.

Le ricerche ulteriori sembrano, ad ogni modo, avere dimostrato che non vi sono linee basiche [1]; e che le coincidenze osservate dal Lockyer erano dovute, in massima parte, alla piccola dispersione dei suoi apparecchi.

Non è il caso dunque di insistere troppo in proposito. Voglio osservare però che se, con mezzi estremamente delicati di ricerca, si potesse stabilire con tutta sicurezza la coincidenza di una o più linee in spettri di diversa origine, questo resultato sarebbe più contrario che favorevole all'ipotesi del Lockyer.

Perchè, quando uno stesso conduttore (per usare il termine della mia teoria) entrasse a far parte di sistemi differenti, le sue righe caratteristiche non potrebbero in nessun modo conservare la loro posizione.

§ 47. *Ricerche di Sir N. Lockyer: dissociazione degli elementi nel sole.* — Di ben maggiore peso si devono ritenere, per il nostro argomento, alcune osservazioni fatte dal Lockyer su gli spettri delle protuberanze [2]).

1) Si veda la bibliografia nel Kayser, l. c., 266.
2) Kayser, l. c., 271.

Dalle quali osservazioni risulta che in codesti spettri, alle volte, certe righe o serie di righe appariscono spostate, mentre altre righe dello stesso metallo rimangono ferme, o, più spesso, si muovono in senso opposto.

La conclusione del Lockyer (accettata anche dal Kayser), che segua di qui la complessità e la dissociazione degli atomi elementari, è in perfetto accordo con la teoria.

Basta infatti riferirsi alla figura 5 e interpretare in essa il sistema (2) come modello di un atomo, per riconoscere immediatamente che la dissociazione, facendo passare dallo spettro (2) ed all' altro spettro (1 + 3), deve produrre delle apparenze simili in tutto a quelle osservate.

§ 48. *Le serie di Kayser e Runge.* — Le osservazioni del Lockyer, di cui ho parlato finora, rispondono in certo modo al primo problema dell' analisi spettrale, da me posto nel paragrafo 44 di questa Memoria; le ricerche di Kayser e Runge [1]) su gli spettri dei corpi semplici contengono, almeno implicitamente, un accenno alla soluzione del secondo problema. Di quello cioè che si riferisce alla struttura dei conduttori elementari dell' atomo.

Kayser e Runge hanno trovato, come è notissimo, che in molti spettri esistono delle serie di righe, definite da una formola del tipo:

$$\text{(A)} \qquad \lambda_n^{-1} = A + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n^4}$$

dove A, B, C sono quantità costanti, e per n si deve porre la successione dei numeri interi a cominciare dal 3.

È naturale di pensare che le righe collegate insieme in un modo tanto semplice derivino da un unico conduttore [2]); e le esperienze di Kayser e Runge indicano anche una strada facile e piana, per sceverare uno dall' altro i diversi elementi costitutivi dell' atomo.

1) Kayser, l. c., 503-573.

2) Se non erro la cosa fu avvertita la prima volta da me in Mem. R. Acc. di Torino, (2), LIII, 1903. Si veda in particolare il § 20.

Gli autori citati osservano infatti a più riprese che talune serie appariscono *invertite* nello spettro, mentre altre non lo sono.

Poichè Kayser e Runge adoperavano come sorgente un arco voltaico, nel quale facevano evaporare i metalli studiati, se ne può dedurre senz' altro che *le diverse serie saranno diversamente distribuite nelle varie regioni dell' arco.*

Una riga infatti apparirà invertita se è emessa in uguale misura dalla parte centrale dell' arco e dal mantello. Sarà brillante se predomina nella prima regione, e manca nella seconda.

§ 49. *Ricerche di F. Lenard su lo spettro dei metalli alcalini nell' arco.* — Nasce da queste risultanze l'opportunità di studiare il comportamento dei metalli nell' arco voltaico; la cosa fu tentata infatti dal Lenard, sebbene in condizioni poco favorevoli, come si vedrà nel seguito, almeno dal punto di vista teorico.

Il Lenard [1]) produceva l' arco fra due carboni, dei quali l' inferiore (positivo), foggiato a coppella, conteneva un sale del metallo in esame. Egli studiò in modo particolare gli spettri del sodio e del litio, e si valse del metodo classico del Lockyer, proiettando, in altri termini, su la fenditura allargata un' imagine reale dell' arco voltaico.

In questo modo ogni linea viene sostituita naturalmente da un' imagine colorata dell' arco, e si può riconoscere subito quali lunghezze d' onda spettino alle diverse regioni.

Nelle esperienze del Lenard il fenomeno luminoso è costituito da due *fiamme*, che si toccano per un punto del loro mantello. La forma caratteristica si svolge quando l' intensità va oltre ai 15 Amp., altrimenti la fiamma di sopra è piccolissima e serrata verso il carbone. In ogni caso le apparenze luminose sono meglio spiegate quanto più grande è la distanza degli elettrodi.

Sperimentando in questo modo si trova che le fiamme corrispondenti alle linee della serie principale (*Hauptserie*)

1) P. Lenard. Ueber den elektrischen Bogen und die Spektren der Metalle " Ann. der Physik " (4), XI, 1903.

sono le più lunghe, poi vengono quelle della prima *Nebenserie*, e da ultimo quelle della seconda.

Le esperienze rendono sempre più probabile la complessità degli atomi per il sodio e per il litio; resta però impregiudicato un problema della massima importanza.

Se in un dato punto dell' arco le linee appartenenti ad una serie speciale vengono a mancare, si possono dare della cosa *due* diverse interpretazioni. Può ritenersi in primo luogo che l' atomo sia dissociato, e che il conduttore corrispondente alle righe di cui si tratta non esista più in quella determinata regione. E si può pensare invece, con uguale diritto (fino a prova contraria), che la minore intensità sia dovuta ad uno scotimento di minore ampiezza, senza che cambi d' altra parte in modo essenziale, la struttura dell' atomo.

Le due ipotesi portano, teoricamente, a conclusioni affatto distinte.

Perchè i periodi caratteristici di un sistema sono determinati con la definizione del sistema medesimo. Il numero e il luogo delle righe nello spettro dipendono, in altre parole, dalle equazioni differenziali o, meglio, dai loro coefficienti.

Invece l' ampiezza dei singoli moti, cioè l' intensità di ciascuna riga, è affare di condizioni iniziali, vale a dire di costanti di integrazione.

Se in un sistema di conduttori un elemento non viene eccitato, certe linee potranno mancare nello spettro, ma quelle che restano non si debbono muovere; se invece l' elemento si allontana, cambieranno le equazioni differenziali, e cambierà di conseguenza ogni periodo.

Ora il metodo sperimentale del Lenard, mentre fornisce, secondo la teoria da me esposta, degli indizii sicuri su l' esistenza dei conduttori costitutivi dell' atomo, non può insegnare nulla sul problema della dissociazione.

Perchè, quando il sistema che si studia fosse decomposto nell' arco, le righe superstiti in un dato punto dovrebbero subire bensì certi spostamenti, e ne verrebbe come conseguenza una deformazione di alcune fra le imagini colorate, che si osservano nello spettroscopio; ma quelle deformazioni,

trattandosi di figure che vanno mutando con molta rapidità, non potrebbero certo constatarsi con sicurezza.

§ 50. *Forme e colori dell' arco voltaico fra elettrodi metallici.* — Io mi sono proposto dunque di riprendere, per altra via, lo studio degli spettri metallici ottenuti con l' arco, tenendo conto nel miglior modo dei resultati teorici.

La strada, che si presenta più naturale, quando si voglia decidere della natura delle radiazioni emesse dai varii punti dell' arco, consiste nel proiettare sopra la fenditura dello spettroscopio un' imagine dell' arco medesimo, spostandola poi successivamente da zona a zona.

Ma, perchè un esame di questo genere riesca possibile, sopra tutto se si vuole del fenomeno ottenere una registrazione fotografica, è necessario che l' arco sia relativamente tranquillo, e durevole, e di forma quasi costante.

L' impiego dei carboni a coppella e dei sali di metalli alcalini non è quindi raccomandabile, almeno per lo scopo nostro.

Del resto, usando i carboni come supporto, si introducono nello spettro delle bande, la cui eliminazione dai risultati finali esige un lavoro lungo e penoso; e d' altra parte il litio ed il sodio non sono nemmeno idonei, come sostanze di prova, per le loro caratteristiche spettrali.

Si sa infatti, dai lavori di Kayser e Runge, che negli spettri dei metalli alcalini la quasi totalità delle righe si può ordinare in serie, secondo la formola (A); ma (come vedremo più innanzi, al § 54 che le serie si possono attribuire a conduttori estremamente semplici.

Ora appare invece ovvio, volendo ottenere dei fenomeni di scissione, di riferirsi a sistemi di circuiti complessi.

Per quest' ultimo motivo, e per eliminare le bande del carbonio, mi sono deciso a studiare degli archi, prodotti direttamente fra elettrodi metallici.

Prima di descrivere le esperienze da me fatte, dirò qualche cosa della forma e dei colori di questi archi, non avendo trovato quasi nulla in proposito, nemmeno nei libri speciali.

Mi sono servito sempre di una vecchia lanterna di Dubosq, sistema Foucault, alla quale avevo tolto il condensatore, so-

stituendolo con un semplice diaframma con foro circolare di due centimetri.

Davanti al foro collocai una lente convergente, che dava sopra uno schermo, posto a forse due metri di distanza, una imagine reale dell' arco, rovesciata e ingrandita quattro o cinque volte.

Queste esperienze che, almeno per alcuni metalli, sono estremamente facili, basterebbero già per dimostrare, ad esempio nella scuola, le enormi differenze che corrono fra le radiazioni emesse dai diversi tratti dell' arco.

Nella forma che si osserva per solito (*Cu*, *Fe*, *Sn*, *Pb*) [1]) si possono infatti distinguere tre regioni particolari e, quasi sempre, bene limitate.

Vi è in primo luogo il tratto immediatamente vicino agli elettrodi, e che chiamerò nel seguito la *regione polare;* questa è la parte più brillante del fenomeno, e le sue tinte richiamano sempre la estremità più rifrangibile dello spettro.

Le regioni polari sono raccordate dall' *arco* propriamente detto. Il quale è pure assai intensamente luminoso, ma molto ricco, di solito, di onde lunghe.

Finalmente, intorno all' arco è avvolta a cartoccio una fiamma o *coda,* col vertice nell' elettrodo inferiore. Questa emette, per regola, poca luce, di toni freddi, verdognoli o giallastri.

Vi sono però dei corpi, che dànno fenomeni assai diversi da quelli ora descritti.

Il cadmio e lo zinco intanto *non* formano un arco stabile; ma, quando si cerca di staccare gli elettrodi uno dall' altro, si vede partire da ciascuno una fiamma a due tinte, con coda leggerissima.

Le fiamme non sono raccordate, come quelle descritte dal Lenard, ma si tagliano anzi spesso sotto angoli acuti. A questa speciale struttura si deve senza dubbio l' instabilità del fenomeno [2]).

1) Le osservazioni devono essere fatte sopra archi un po' lunghi.

2) Si potrebbe pensare che questa, come più generale, sia, in condizioni opportune, la forma propria di tutti gli archi. Però, anche spingendo la corrente fino a 30 Amp., non mi è riuscito di ottenere nè dal rame nè dal ferro niente di simile.

Merita ancora una menzione il caso dell' alluminio [1]), perchè nel suo arco i rapporti di luminosità fra la coda e le altre regioni risultano invertiti; la coda è invero il tratto più brillante del fenomeno.

Ho esaminato successivamente sette metalli: rame, ferro, alluminio, zinco, cadmio, stagno e piombo, e inoltre dei carboni impregnati (così detti *Effektkohlen*) della marca C. Conradty « *Noris* ». *Niederspannung* [2]).

Raccolgo in breve i resultati ottenuti, avvertendo che la differenza di potenziale fu sempre di 110 Volt (continui).

" Noris „.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm	13-15 Amp.

La regione polare è chiarissima, appena volgente al cilestro, l' arco è di un bel violetto; la coda, molto ampia e ricca, ha una tinta arancione. Il fenomeno appare straordinariamente tranquillo, e la lampada regola anche meglio che coi carboni ordinarii; a volte la coda rimane immobile e conserva la sua forma per parecchi minuti.

Rame.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm.	11-13 Amp.

La regione polare, assai brillante, ha quella speciale tinta azzurrognola, che si osserva portando un filo di rame umettato di acido nitrico nella fiamma di un becco Bunsen; l'arco invece stacca in un bel colore verde-pistacchio pallido. La coda, leggerissima, instabile, e a volte soffiata orizzontalmente, è rossastra.

Anche per il rame si ha una certa regolarità d'andamento. Ma l' ossido, che ricopre con una crosta nera gli elettrodi,

1) Il metallo da me impiegato conteneva molte impurità, e in particolare del calcio, come dedussi da un' analisi del Sig. Rolla, laureando in Chimica; e verificai con lo spettroscopio.

2) Secondo un'analisi che il Dr. Roncagliolo, primo assistente in questo Istituto di Chimica generale, ebbe la bontà di fare per me, l' anima dei carboni " Noris „ contiene quasi esclusivamente del fluoruro di calcio. La cosa è confermata dai risultati spettroscopici (si confronti il § 51).

appena la lampada cessa di funzionare, impedisce molte volte all' arco di ristabilirsi.

Ferro.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm.	12-13 Amp.

Bell' arco celeste, con poli appena accennati, più luminosi, ma dello stesso tono. La coda è tranquilla, abbondantissima, di color giallo-cromo carico. La lampada funziona bene solamente se il polo positivo sta in basso; però, invertendo gli uffici degli elettrodi, il fenomeno non cambia di aspetto.

L' arco del ferro è, fra quelli metallici, il più tranquillo, tanto che potrebbe forse trovare qualche applicazione nella pratica.

Alluminio.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm.	13-14 Amp.

Arco e poli debolmente luminosi e violacei, bensì i poli volgono alle volte verso il carnicino; coda fissa, brillantissima, color verde-pavone [1]).

L' ossido, che ricopre gli elettrodi, è anche più isolante di quello del rame, e impedisce il funzionamento regolare della lampada.

Ferro, rame e alluminio (e i primi due in particolare) consumano pochissimo.

Zinco.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	6-10 Amp.

La parte delle fiamme più vicina agli elettrodi è azzurra, la punta è porporina; ma l' aspetto del fenomeno è molto variabile. Da principio, quando gli elettrodi si staccano, il colore azzurro predomina; poi compare il porporino, cominciando dal mezzo. Se la distanza degli elettrodi cresce ancora tutto l'arco si tinge di porpora, e finisce per spegnersi.

1) La straordinaria ricchezza di raggi ultravioletti rende pericoloso per la vista l' arco dell' alluminio. Un mio allievo, che l' osservò a più riprese, senza occhiali, ne ebbe per due giorni una congiuntivite assai molesta.

A momenti compare intorno alle due fiamme un' aureola leggerissima, instabile, di color giallo-limone.

La bacchetta positiva si consuma rapidissimamente.

Cadmio.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	6-10 Amp.

Il fenomeno è simile in tutti i particolari a quello presentato dallo zinco. Solo le tinte variano, all' azzurro sostituendosi il verde e al porporino un color di mattone. Non vi è traccia d' aureola.

L' arco è anche più instabile che per lo zinco, e il consumo (al polo positivo) è anche maggiore: nelle condizioni delle mie esperienze una bacchetta di un cm. di diametro e di parecchi cm. di lunghezza si svaporava in un mezzo minuto.

La forma caratteristica si osserva particolarmente bene se il polo positivo sta in alto, e il negativo in basso.

Stagno.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	7-8 Amp.

Anche per lo stagno la regione polare e l' arco mutano spesso di grandezza: le tinte del resto non le differenziano fortemente, passando in modo quasi insensibile da un color malva a un color di lavanda. L' arco è tumultuoso e instabile; la coda, che si svolge ad intervalli, ha un bel tono caldo, fra l' arancio e il rosso-rame.

Il consumo degli elettrodi non è grande.

Piombo.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	8-12 Amp.

Arco irregolare, instabile, e come per esplosioni successive, non dissimile da quello dello stagno; la coda, più leggera, ha anche una tinta più fredda.

L' elettrodo positivo consuma moltissimo, poco meno che nel caso del cadmio.

Riassumendo le osservazioni che precedono, risulta chiaramente come lo zinco e il cadmio, lo stagno e il piombo non

siano adatti per una ricerca nella quale si richiede una certa stabilità di apparenze. Mi sono dunque limitato nel seguito allo studio del rame, del ferro, dell' alluminio, e dei carboni « *Noris* ».

§ 51. *Spettri emessi dalle varie regioni dell' arco.* — Ho stabilito nel paragrafo 45 che il problema della dissociazione degli atomi si risolve solamente con lo studio delle posizioni caratteristiche per le singole righe; nel paragrafo 49 poi ho fatto vedere che lo spettroscopio, usato col metodo di Lockyer, non può dare in proposito nessun indizio sicuro. Determina invece con molta agevolezza la esistenza e la varia eccitazione dei singoli conduttori.

Prima di accingermi alle ricerche definitive volli quindi esaminare con lo spettroscopio *obbiettivo* gli spettri del rame, del ferro, dell' alluminio e dei carboni « *Noris* ».

Non è necessario per questo impiegare una lente, e proiettare nel piano della fenditura una imagine reale dell' arco; ma si può procedere in un modo più semplice.

La lampada di Dubosq viene disposta nella sua custodia, e si allontanano tutti gli accessorii del portaluce, compreso il tubo destinato a reggere il condensatore; si colloca poi lo spettroscopio [1]) a cinque o sei metri di distanza (sopra un tavolino a piattaforma girevole), e si priva per intero del suo collimatore.

È molto facile, girando un poco la piattaforma del tavolo, disporre l' apparecchio sotto l' incidenza migliore; ogni riga appare in tale caso sostituita da una piccola imagine dell'arco.

In realtà si ritrovano per questa via, e in condizioni particolarmente facili e comode e adatte alle esperienze dimostrative, dei resultati analoghi a quelli del Lockyer e del Lenard.

Ricorderò alcuni esempii in modo speciale.

Per il rame Kayser e Runge hanno stabilito l' esistenza di due serie di righe, corrispondenti alla formola (A), pure lasciando in disparte tutto il resto dello spettro. Si trova che le imagini appartenenti alle serie *sono prive di coda*, mentre tutte le altre ne sono fornite.

1) Era un grande spettrofotometro del Krüss con due prismi.

È caratteristico il comportamento delle tre righe brillantissime verdi: mentre le due di sinistra ($\lambda = 5218$ e $\lambda = 5153$), che costituiscono i secondi termini delle serie ($n = 4$), mancano della coda, la terza ($\lambda = 5106$) è provvista di una coda abbondantissima.

Sono pure senza coda le due righe $\lambda = 4063$ e $\lambda = 4023$, che rappresentano i terzi termini ($n = 5$) nelle serie.

In certi istanti la $\lambda = 5153$ e la $\lambda = 4023$ sembrano però leggermente allargate; sarebbe questo un argomento per ritenere, come risulta del resto da altri indizii, che le due serie *non* sono dovute allo stesso conduttore. Sicchè è più ragionevole parlare, come appunto ho fatto, di *due* serie distinte, piuttosto che di *una serie di coppie*.

Per il ferro non ho potuto ricavare nessun risultato sicuro, il mio spettroscopio avendo una dispersione troppo piccola, perchè le righe tanto fitte di questo metallo fornissero delle imagini abbastanza distinte.

L' alluminio da me impiegato mostra di nuovo alcuni fatti interessanti. Mi accontenterò di ricordare che le righe violette H_1 e H_2, presenti nel suo spettro, hanno una coda amplissima, mentre nessun' altra raggiunge, nemmeno da lontano, le loro dimensioni [1]).

Finalmente i carboni « *Noris* » possono servire anch' essi ad una bella esperienza dimostrativa; appaiono infatti nel loro spettro tre righe violette, a comportamento diverso, la mediana delle quali (è la riga $\lambda = 4226$ del calcio) ha il massimo splendore.

Or bene: mentre la prima, la meno rifrangibile, è ridotta nello spettroscopio obbiettivo a due tratti luminosi, corrispondenti alle regioni polari, e la terza presenta l' intero arco, la linea di mezzo è fornita di una coda abbondante.

Se si proiettano su la fenditura dello spettroscopio, rimesso in condizioni normali, le tre regioni, una dopo l' altra, si osserva, in perfetto accordo con ciò che precede, la presenza costante della linea mediana; quanto alla terza riga essa è

1) L' alluminio di cui disponevo essendosi mostrato assai impuro, non lo impiegai nelle ultime esperienze. Il fatto che riporto nel testo fa vedere come l' esame allo spettroscopio, senza fenditura, riveli immediatamente la presenza di corpi estranei.

visibile nell' arco e presso i poli, mentre la prima si mostra solo nella regione polare.

Ho raccolto su gli spettri or ora descritti una serie di dati interessanti, e mi propongo di pubblicarli in altro luogo. Ora preferisco passare alla descrizione delle esperienze e dei resultati fotografici, che, per lo speciale argomento di questo lavoro, offrono un interesse di gran lunga maggiore.

§ 52. *Posizione delle righe negli spettri delle diverse regioni.* — Per stabilire con esattezza la posizione relativa delle righe, negli spettri delle diverse regioni di un medesimo arco, ho preferito di fotografare direttamente il fenomeno.

Sopra ogni lastra furono prese *due* fotografie nel modo che segue.

Dell' arco si formava un' imagine reale (ingrandita 10 a 15 volte), che veniva a proiettarsi nel piano della doppia fenditura dello spettro-fotometro di Krüss; movendo la lente era facile condurre nella posizione voluta un tratto o l' altro dell' imagine.

Ciò posto si chiudeva una delle fenditure, lasciando l' altra aperta, e, subito davanti a questa, si collocava uno schermo di cartone bianco, con una piccola finestra. La finestra serviva, come si intende, per fissare la posizione dell'imagine.

Fatta una prima fotografia [1]) si chiudeva la fenditura adoperata innanzi, si apriva l' altra, esattamente allo stesso punto, e si spostava del tratto necessario, nel suo piano, lo schermo. Si riconduceva quindi su la finestra l' imagine, nella posizione voluta.

In un mio lavoro, pubblicato nel LIV volume delle *Memorie dell' Accademia di Torino,* ho riprodotto alcune delle prove così ottenute; come regola generale se ne può ricavare che certe righe scompaiono quando si passa successivamente dai poli all' arco e alla coda, *ma le righe superstiti rimangono ferme.*

1) La macchina stava al posto del cannocchiale. Non è necessario avvertire che un diaframma, inserito fra schermo e fenditura, rimaneva abbassato finchè l' imagine non fosse a suo luogo; e si poteva far cadere d' un colpo, quando sopravvenisse qualche incidente a disturbare l' andamento normale dell' esperienza.

Il risultato è simile a quello, che ho dedotto innanzi dalle esperienze del Lockyer su le scintille, e sembra indicare che le temperature, di cui possiamo disporre finora nei nostri laboratorii, non sono sufficienti per la dissociazione degli atomi materiali.

§ 53. *Probabile struttura degli atomi.* — Del resto l'incapacità nostra di scindere il sistema vibrante nelle sue parti costitutive non ci impedisce di riconoscerne l'esistenza e questo è l'essenziale.

Possiamo, ad esempio, essere sicuri che l'atomo del rame risulta dalla riunione di tre conduttori almeno, e conseguenze simili derivano per gli atomi dei metalli alcalini dalle ricerche del Lenard, per il ferro e per il calcio ed altri corpi dalle mie.

Ma possiamo dire anche qualche cosa di più. La formola empirica di Kayser e Runge sembra avere infatti una realtà oggettiva, nel senso che le righe di una serie da essa definita corrisponderebbero ad un elemento speciale e distinto dell'atomo.

Un atomo ci si presenta dunque come un sistema di conduttori di varia struttura; alcuni fra questi di tipo particolarmente semplice e costante producono le serie riscontrate nei diversi spettri metallici.

§ 54. *Ancora le serie di Kayser e Runge.* — Vale la pena senza dubbio di insistere in proposito e di completare per quanto è possibile il modello.

Una questione ci si presenta spontanea: esistono in realtà dei conduttori che danno le serie? e quale è la loro struttura? Purtroppo non mi è riuscito di risolvere il problema da un punto di vista generale, e debbo quindi limitarmi ad alcuni resultati particolarissimi.

Così per esempio si verifica facilmente che il conduttore del paragrafo 7 soddisfa alla formola di Kayser e Runge con due costanti (A e B).

Similmente i conduttori a quattro e cinque oscillazioni del paragrafo 9 soddisfano alla formola completa.

Per il primo di questi i reciproci delle onde sono proporzionali ai numeri:

$$\sqrt{2-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=0,62\,,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=1,17\,,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=1,62\,,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=1,90\,.$$

Proviamoci dunque a scrivere:

$$0,62=A+\frac{B}{9}+\frac{C}{81}\,,$$

$$1,17=A+\frac{B}{16}+\frac{C}{256}\,,$$

$$1,62=A+\frac{B}{25}+\frac{C}{625}\,.$$

Si calcoleranno così i valori delle costanti A, B e C; portando questi ultimi nella:

$$\lambda_6^{-1}=A+\frac{B}{36}+\frac{C}{1296}$$

risulta:

$$\lambda_6^{-1}=\mathbf{1,91}\,,$$

che è appunto il reciproco della quarta onda.

È un risultato senza dubbio molto curioso, e devo confessare che esso mi ha fornito la prima idea della presente teoria.

§ 55. *Spettri a doublets e triplets.* — L' esistenza degli spettri a *doublets* e *triplets* deriva dal nostro modello in modo semplice e naturale.

La teoria esposta nel paragrafo 31 si può considerare infatti come la descrizione di un atomo, che emette uno spettro a *doublets;* si osserverà anzi una cosa particolarmente interessante e cioè, se i due conduttori che si affacciano danno (quando sono isolati) una serie di Kayser e Runge, il sistema che risulta dalla loro riunione emette due serie.

Nella figura 5, in basso, è rappresentato un caso molto semplice di un sistema con spettro a *doublets.* Si tratta di due conduttori (uguali) a due oscillazioni; propriamente sono due conduttori come quello della figura 5 (3).

Assumendo per le costanti i valori del paragrafo 38 si ottengono le lunghezze d' onda seguenti :

3.		88,8		153,8	
4.	87,8		89,4 152,1		154,8.

A sua volta il teorema del paragrafo 34 ci insegna che la riunione di tre conduttori uguali dà origine ad uno spettro a *triplets.*

§ 56. *Atomi di corpi chimicamente simili.* — I corpi chimicamente affini, quelli cioè che appartengono ad uno stesso gruppo della serie naturale periodica, hanno, come si sa, degli spettri costruiti quasi sempre in modo simile. E poichè la simiglianza della radiazione suppone la simiglianza dei sistemi vibranti, vogliamo domandarci appunto come si debba intendere la cosa. Come, ad esempio, quando si conoscesse la costituzione dell' atomo del litio, se ne potrebbe dedurre la struttura del sodio, o del potassio, o di un altro metallo alcalino qualunque.

Consideriamo all' uopo un sistema di conduttori e supponiamo per un momento che siano trascurabili le azioni elettrostatiche e le resistenze dei fili; supponiamo anche trascurabili i pesi di questi ultimi davanti a quelli delle capacità, per modo che il peso dell' intero sistema si ottenga sommando i pesi delle capacità, che esso contiene.

In queste ipotesi si dimostrano facilmente alcune proposizioni notevoli. E anzitutto: *se le dimensioni lineari di un dato sistema si moltiplicano per un numero k, le lunghezze delle onde emesse dal medesimo sistema riescono moltiplicate anche per k.*

Infatti il determinante, che annullandosi fornisce l'equazione caratteristica del sistema proposto sotto la forma (IV, 5), sarà costituito da elementi, i quali contengono termini di tre sole forme, e cioè:

$$D^2 L, D^2 M \quad e \quad \frac{1}{C}.$$

Ora se le dimensioni lineari del conduttore crescono nel rapporto di *1* a k anche i coefficienti di autoinduzione e di induzione mutua e le capacità devono crescere nel medesimo rapporto. I termini, che costituiscono gli elementi del determinante, prenderanno dunque le forme:

$$D^2 k L, \quad D^2 k M \quad e \quad \frac{1}{kC},$$

o anche:

$$D^2 k^2 L, \quad D^2 k^2 M \quad e \quad \frac{1}{C},$$

perchè il significato dell'equazione nòn muta se la si moltiplica un numero qualunque di volte per il parametro k.

Ciò posto se D_n era una radice dell'equazione primitiva $\frac{D_n}{k}$ sarà certamente una radice della nuova caratteristica, perchè i risultati delle sostituzioni di D_n nell'una e di $\frac{D_n}{k}$ nell'altra coincidono.

Ma le radici come D_n sono inversamente proporzionali alle lunghezze delle onde emesse dal sistema, al quale la caratteristica si riferisce; e però le onde crescono nel rapporto nel quale le radici diminuiscono. Dal che segue la proposizione enunciata.

Se invece *i fili conservano la loro lunghezza e la posizione reciproca, e le capacità crescono nel rapporto di 1*

a k, si riconoscerà con lo stesso procedimento che *le onde devono crescere nel rapporto di 1 a $\sqrt{k}$.*

Ma in quest' ultima ipotesi i pesi risulteranno pur sempre moltiplicati per k^3, e però indicando con P, P', λ_n e λ'_n i pesi dei sistemi e le onde corrispondenti (quelle cioè che derivano da una stessa radice della caratteristica) prima e dopo la trasformazione, avremo senz' altro:

$$\frac{P'}{P} = k^3 \quad \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \sqrt{k},$$

ed eliminando k^3:

$$\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \sqrt[6]{\frac{P'}{P}}.$$

Se si chiama, per comodità di linguaggio, *famiglia di sistemi* una serie di sistemi che s' ottengono uno dall' altro lasciando inalterati i fili e moltiplicando le dimensioni lineari di ogni capacità per una stessa costante, potremo ritenere, per ciò che si è visto, che *in una famiglia le onde corrispondenti stanno come le radici seste dei pesi.*

Ciò posto, un confronto numerico insegna che *è lecito interpretare gli atomi di un dato gruppo della serie periodica appunto come una famiglia di sistemi*, quando alle onde, che abbiamo chiamato corrispondenti, si sostituiscano le onde omologhe di Kayser e Runge, quelle cioè che derivano da uno stesso valore del parametro n.

La corrispondenza che si stabilisce in questo modo fra i resultati teorici e i resultati sperimentali non è completamente rigorosa: e che non possa esserlo segue già dalla considerazione della formula empirica:

$$\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \frac{A + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n^4}}{A' + \frac{B'}{n^2} + \frac{C'}{n^4}},$$

secondo la quale il rapporto $\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}$ non è sempre il medesimo, ma deve anzi variare di continuo al variare del parametro n.

Se però si prova ad eseguire effettivamente i calcoli si riconosce che, per i valori che si devono attribuire nel caso pratico alle costanti, la variazione è lenta e regolare, e offre un andamento caratteristico.

Noi faremo il confronto prendendo in esame gli spettri del litio e del sodio. Per le costanti di questi corpi Kayser e Runge hanno determinato i valori, che riporto nella tabella seguente [1]).

	A	— B	— C
Li	28587	109625	1847
Na	24475	110065	4148

Dai quali valori si ricavano i rapporti di lunghezze d'onda segnati qui appresso:

n	3	4	5	6	7	∞
$\dfrac{(\lambda_n)_{Na}}{(\lambda_n)_{Li}}$	1,34	1,23	1,21	1,19	1,18	1,17

Avendosi d' altra parte:

$$(P)_{Li} = 7\,,$$

$$(P)_{Na} = 1{,}23\,,$$

risulta anche:

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Na}}{(P)_{Li}}} = 1{,}22\,.$$

Il rapporto dunque delle lunghezze d' onda relative alle prime righe dei due spettri è notevolmente diverso da quello delle radici seste dei pesi atomici; ma per le coppie succes-

1) Riferisco ora e nel seguito i numeri relativi alla prima serie accessoria (erste Nebenserie), perchè è quella per cui si ha la maggior copia di dati.

sive le cose cambiano, e la deviazione è al massimo del 3 per cento del valore totale.

Se si fa la media dei cinque numeri :

1,34 1,23 1,21 1,19 1,18

si trova :

1,23,

che è vicinissimo al quoziente delle radici seste.

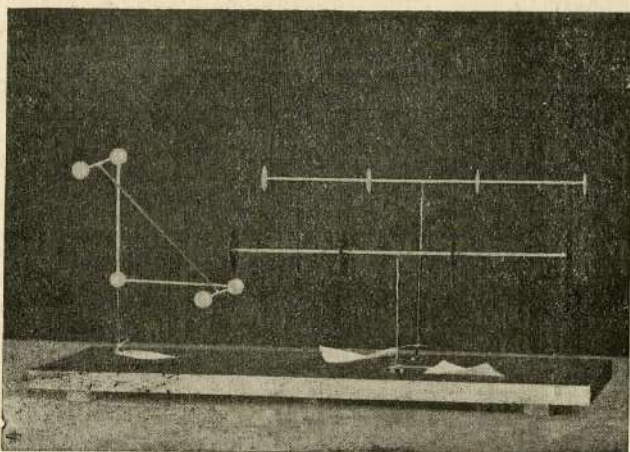



Fig. 8. — *a*) Conduttore a quattro oscillazioni. *b*) e *c*) Conduttori a tre oscillazioni; i loro pesi stanno come 7 e 23, e le onde corrispondenti come 1 e 1,22, mentre il rapporto delle onde omologhe negli spettri del litio e del sodio è in media di 1 a 1,23.

Una cosa simile si osserva confrontando col litio il potassio, il rubidio ed il cesio. I rapporti delle prime righe si allontanano infatti dal valore teorico, ma, dopo, lo scostamento è sempre assai piccolo. Per la seconda e per la terza coppia si trovano inoltre dei valori prossimi alla media di quelli forniti dalle prime cinque coppie, e prossimi ai rapporti delle radici seste dei pesi atomici.

Riferisco qui sotto i numeri relativi ai confronti delle terze righe ($n = 5$):

$$\frac{(\lambda)_K}{(\lambda)_{Li}} = 1,39 \qquad \frac{(\lambda)_{Rb}}{(\lambda)_{Li}} = 1,50 \qquad \frac{(\lambda)_{Cs}}{(\lambda)_{Li}} = 1,63$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_K}{(P)_{Li}}} = 1,33 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Rb}}{(P)_{Li}}} = 1,52 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Cs}}{(P)_{Li}}} = 1,63$$

Per i metalli non alcalini le cose vanno assai più semplicemente perchè le righe omologhe di due corpi, contenuti nel medesimo gruppo, hanno dei rapporti, che variano ben poco col parametro n.

Anche qui mi accontenterò di riportare alcuni dati, che si calcolano per $n = 5$:

$$\frac{(\lambda)_{Ag}}{(\lambda)_{Cu}} = 1,03 \qquad \frac{(\lambda)_{Ca}}{(\lambda)_{Mg}} = 1,19 \qquad \frac{(\lambda)_{Sr}}{(\lambda)_{Mg}} = 1,33$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Ag}}{(P)_{Cu}}} = 1,08 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Ca}}{(P)_{Mg}}} = 1,09 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Sr}}{(P)_{Mg}}} = 1,24$$

$$\frac{(\lambda)_{Cd}}{(\lambda)_{Zn}} = 1,06 \qquad \frac{(\lambda)_{Hg}}{(\lambda)_{Zn}} = 1,07$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Cd}}{(P)_{Zn}}} = 1,15 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Hg}}{(P)_{Zn}}} = 1,20$$

Questi numeri bastano, se non mi inganno, per stabilire che la regola delle radici seste ha il valore di un fatto naturale, almeno nei limiti di approssimazione nei quali è vera, ad esempio, la nota legge di Dulong e Petit.

§ 57. *Conclusione.* — I resultati essenziali della presente ricerca si riassumono dicendo che gli atomi *si rappresentano* con sistemi di conduttori complessi; le serie di Kayser e Runge hanno una realtà oggettiva e ciascuna di esse è fornita da un elemento particolare isolato.

Sciogliendo la riserva fatta al paragrafo 38 diremo adesso che le molecole *possono* considerarsi come sistemi di sistemi.

Questo non vuol dire certamente che atomi e molecole

debbano essere formati in natura secondo lo schema da me proposto.

Anzi la teoria si potrebbe rifare, prendendo come punto di partenza l' ipotesi del Lorentz ; quelli che io chiamo fili conduttori diventerebbero allora traiettorie di elettroni. Comunque, e qui sta il lato importante della quistione dal punto di vista pratico, la massima parte dei miei resultati continuerebbe sempre a sussistere.

Che se ho scelto il primo modello, in luogo del secondo, la cosa non fu senza buone ragioni. È più facile infatti imaginare e calcolare un conduttore complesso che un sistema di particelle vibranti, e sotto la forma da me stabilita la teoria si presta anche meglio alle verifiche sperimentali. Volendo *realizzare* il moto armonico di un elettrone, bisogna pure ricorrere all' oscillatore del Hertz. Infine, e da un punto di vista strettamente personale, lo studio sul processo luminoso era per me una conseguenza delle ricerche relative all' assorbimento, al colore, alla dispersione e alla rifrazione delle onde elettromagnetiche. Le quali ricerche tutte derivano ora, dai nuovi fenomeni della risonanza ottica, un interesse, che a principio era difficile prevedere.

Mi si permetterà ad ogni modo di insistere su questo che, qualunque debba essere la forma ulteriore della teoria, le proposizioni relative alla complessità degli atomi, al significato delle serie, al meccanismo con il quale si originano gli spettri a *doublets* e *triplets* e le radiazioni dei corpi composti hanno tutta l' apparenza di resultati definitivamente stabiliti.

Genova, Istituto Fisico della R. Università
Luglio 1904.